Краевое государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Лазовский колледж технологий и туризма»

КГБ ПОУ "Лазовский колледж технологий и туризма"
документ подписан электронной подписью

Сведения о сертификате ЭП

Сертификат 6C677BAB69B4DA5E0210AC28439D8399

Владелец Гирис Геннадий Петрович

Действителен с 22 июня 2023 по 14 сентября 2024

УТВЕРЖДАЮ
заместитель директора по УПР
______________ М.В. Михайлова

«___»_______________20__ г.

Фонд оценочных средств
ОПП.01 МАТЕМАТИКА

общеобразовательного цикла
программы подготовки
квалифицированных рабочих, служащих
по профессии

23.01.17. «Мастер по ремонту и обслуживанию автомобилей»

Лазо, 2023

Фонд оценочных средств

Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств

1 Область применения

Комплект **фондов оценочных средств** (ФОС) предназначен для проверки результатов освоения учебной дисциплины физика входящего в состав, профессиональной образовательной программы. Объем часов на аудиторную нагрузку **232 часа.**

2 Объекты оценивания – результаты освоения УД

В результате освоения учебного предмета « Математика» обеспечивается достижение студентами следующих результатов:

уметь:

- умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;
- умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;
- владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;
- владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;
- владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения;
- целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;

знать:

- сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;
- сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
- владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
- сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;
- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

Формой аттестации по учебному предмету является экзамен.

3. Формы контроля и оценки результатов освоения

Контроль и оценка результатов освоения – это выявление, измерение, оценивание знаний, умений формирующихся общих и профессиональных компетенций в рамках освоения учебной дисциплины

В соответствии с учебным планом специальностям и рабочей программой предусматривается текущий и итоговый контроль результатов освоения.

3.1 Формы текущего контроля

Текущий контроль успеваемости представляет собой проверку усвоения учебного материала, регулярно осуществляемую на протяжении курса обучения.

Текущий контроль результатов освоения дисциплины в соответствии с рабочей программой и календарно-тематическим планом происходит при использовании следующих обязательных форм контроля:

– выполнение и защита практических работ,

- проверка выполнения самостоятельной работы студентов,

- проверка выполнения контрольных работ.

Во время проведения учебных занятий дополнительно используются следующие формы текущего контроля – устный опрос, решение задач, тестирование по темам отдельных занятий.

Проверка выполнения контрольных работ

Контрольная работа проводится с целью контроля усвоенных умений и знаний и последующего анализа типичных ошибок и затруднений студентов в конце изучения темы или раздела. Согласно календарно-тематическому плану предусмотрено проведение следующих контрольных работ:

Контрольная работа № 1 по теме «Развитие понятий о числе».
Контрольная работа № 2 по теме «Перпендикуляр и наклонная».
Контрольная работа №3 по теме «Основные тригонометрические формулы».
Контрольная работа № 4 по теме «Функции, их свойства и графики».
Контрольная работа № 5 по теме «Тригонометрические уравнения, неравенства и системы уравнений».
Контрольная работа № 6 по теме «Декартовы координаты».
Контрольная работа №7 по теме «Координаты и векторы».
Контрольная работа № 8по теме «Производная».
Контрольная работа № 9 по теме «Применение производной».
Контрольная работа № 10 по теме «Применение производной к исследованию функций».
Контрольная работа № 11 по теме «Призма и параллелепипед».
Контрольная работа № 12 по теме «Пирамида».
Контрольная работа № 13 по теме «Тела и поверхности вращения». Контрольная работа № 14 по теме «Объём многоугольника».
Контрольная работа № 15 по теме «Объём тел вращения».
Контрольная работа № 16 по теме «Корни и степени»
Контрольная работа № 17 по теме «Показательные уравнения и неравенства»
Контрольная работа № 18 по теме «Логарифмические уравнения и неравенства»

3.2 Форма итоговой аттестации

Итоговая аттестация по учебной дисциплине математика – экзамен, спецификация которого содержится в комплекте ФОС.

Студенты допускаются к сдаче экзамена при выполнении всех видов самостоятельной работы, практических и контрольной работ, предусмотренных рабочей программой и календарно-тематическим планом.

При условии своевременного и качественного выполнения студентом всех видов работ, предусмотренных рабочей программой.

4 Система оценивания комплекта ФОС текущего контроля и итоговой аттестации

Система оценивания каждого вида работ описана в соответствующих методических рекомендациях и в спецификации к контрольным работам и итоговой аттестации.

При оценивании практической и самостоятельной работы студента учитывается следующее:

- - качество выполнения практической части работы;
- - качество оформления отчета по работе;
- - качество устных ответов на контрольные вопросы при защите работы.

Каждый вид работы оценивается по пяти бальной шкале.

- «5» (отлично) – за глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором студент свободно и уверенно ориентируется; за умение практически применять теоретические знания, высказывать и обосновывать свои суждения. Оценка «5» (отлично) предполагает грамотное и логичное изложение ответа.
- «4» (хорошо) – если студент полно освоил учебный материал, владеет научно-понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет теоретические знания на практике, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности.
- «3» (удовлетворительно) – если студент обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности, в применении теоретических знаний при ответе на практико-ориентированные вопросы; не умеет доказательно обосновать собственные суждения.
- «2» (неудовлетворительно) – если студент имеет разрозненные, бессистемные знания, допускает ошибки в определении базовых

понятий, искажает их смысл; не может практически применять теоретические знания.

5.2 Итоговая оценка за контрольную работу определяется как средний балл по всем заданиям.

6. Время выполнения письменной контрольной работы

На выполнение письменной контрольной работы отводится 45минут. Среднее время выполнения одного задания – 7минут.

Рекомендации по подготовке к контрольной работе

При подготовке к контрольной работе рекомендуется использовать конспекты лекций, практические тетради

учебники:

- Башмаков М.И. «Математика» НПО и СПО «Академия» Москва 2012г.
- Гусев В. А. «Математика» НПО и СПО «Академия» Москва 2012г
- Колмогоров А.И. «Алгебра и начала анализа»10-11кл. «Просвещение» Москва 2006г.
- Башмаков М.И. «Математика» НПО и СПО «Академия» Москва 2012г.
- (задачник).
- Башмаков М.И. «Математика» НПО и СПО «Академия» Москва 2012г.
- (учебное пособие).
- Погорелов А.В. «Геометрия» 10-11кл. «Просвещение» Москва 2006г.

IV Итоговая аттестация

Спецификация экзамена

по ОПП.01 Математика

Назначение экзамена – оценить уровень подготовки студентов по учебной дисциплине математика с целью установления их готовности к дальнейшему усвоению специальностей

1 Содержание экзамена определяется в соответствии с ФГОС СПО рабочей программой дисциплины математика

2 Принципы отбора содержания экзамена:

Ориентация на требования к результатам освоения УД представленным в соответствии с ФГОС СПО специальности по специальностям и рабочей программой УД

Комплект заданий для контрольных работ
по ОПП.01 « Математика»

Контрольная работа № 1 по теме «Развитие понятий о числе».

ВАРИАНТ № 1

1. *Вычислить:* $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{4}{9}$

2. *Превратить в десятичную дробь:* $\frac{12}{25}$

3. *Превратить в обыкновенную дробь:* 0,24

4. *Выполнить деление с остатком:* 924:25

5. *Найти процентное содержание числа* 12 от числа 72

6. *Найти НОК и НОЗ чисел:* 96 и 124

7. *Вычислить для комплексных чисел* $z_1=2+i$ *и* $z_2=3-i$*:* а) $z_1 + z_2$;
 б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$;

ВАРИАНТ № 2

1. *Вычислить:* $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}-\frac{1}{5}$

2. *Превратить в десятичную дробь:* $\frac{14}{30}$

3. *Превратить в обыкновенную дробь:* 0,36
4. *Выполнить деление с остатком:* 842:24

5. *Найти процентное содержание числа* 11 от числа 88

6. *Найти НОК и НОЗ чисел:* 830 и 72

7. *Вычислить для комплексных чисел* $z_1=4-i$ *и* $z_2=2+i$*:* а) $z_1 + z_2$;
 б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$;

Контрольная работа № 2 по теме «Перпендикуляр и наклонная»

Вариант № 1

1	Из точки к плоскости проведена наклонная под углом 45° к плоскости. Найти проекцию наклонной на плоскость, если перпендикуляр равен $4\sqrt{2}$см.
2	Из точки А к плоскости проведены перпендикуляр АС=40см и наклонная АВ-50см. Найти длину проекции наклонной.
3	Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 12см и 20см.

	Разность проекций этих наклонных равна 6см. Найдите проекции этих наклонных.
4	Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 12см и 22см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 3:4.

Вариант № 2

1	Из точки к плоскости проведена наклонная под углом 60° к плоскости. Найти проекцию наклонной на плоскость, если перпендикуляр равен $2\sqrt{3}$см.
2	Из точки А к плоскости проведены перпендикуляр АС=15см и наклонная АВ=17см. Найти длину проекции наклонной.
3	Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 15см и 25см. Разность проекций этих наклонных равна 10см. Найдите проекции этих наклонных.
4	Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 16см и 26см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2:3.

Контрольная работа №3 по теме «Основные тригонометрические формулы».

Вариант № 1

1	$\cos^2\alpha-1$
2	$\sin^2\alpha+(1-\cos^2\alpha)$
3	$(\sin\alpha-1)(\sin\alpha+1)$
4	Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=0,8$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$
5	$1-\frac{1}{\sin^2\alpha}$
6	$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha$
7	$-tg\alpha\cdot ctg\alpha+\sin^2\alpha$
8	$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=2$

Вариант № 2

1	$1-\sin^2\alpha$
2	$\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha-1$
3	$(1-\cos\alpha)(\cos\alpha+1)$
4	Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{12}{13}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$
5	$\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$
6	$\cos^2\alpha\cdot tg^2\alpha-1$
7	$-tg\alpha\cdot ctg\alpha+\cos^2\alpha$
8	$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=-2\sin\alpha\cos\alpha$

Контрольная работа № 4по теме «Функции, их свойства и графики».

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$
2. Решите неравенство $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+1} \le 5$
3. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 8x + 3{,}1$
4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A(-2;1) и B(6;3)
5. Закрасьте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(y - 3x)(2y + x) \ge 0$
6. Постройте график функции $y = \left|4 \cdot |x| - 3 - x^2\right|$

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$
2. Решите неравенство $\frac{5}{x+3} + \frac{4}{x} \le 3$
3. Найдите наибольшее значение функции $y = -2x^2 + 8x - 3{,}1$
4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A(4;1) и B(6;3)
5. Закрасьте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\frac{y - x^2}{y - x} \le 0$
6. Постройте график функции $y = \left|x^2 - 6 \cdot |x| + 8\right|$

Контрольная работа № 5 по теме «Тригонометрические уравнения, неравенства и системы уравнений».

Вариант №1

1.Решите уравнение

а) cos x=-1; б) sinx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) ctgx=-$\sqrt{3}$.

2. а) $\sin^2$x+sinx-2=0; б) 3$\sin^2$x-cosx+1=0.

3. а) sinx- cosx=0; б) 3$\sin^2$x+2$\sqrt{3}$ sinx cosx+cos ^{2}x=0.

4. а) sin x =- 0,5; б) cos x= $\frac{1}{3}$; в) tgx=-3.

5 а) sinx+ cosx=1; б) 2$\cos^2$x+sin4x=1.

6 Решите неравенство :

а) Sin x<0,5; б)cos x>0,5; в) tgx $\le$-3.

г) $2\cos^2 x+\sqrt{2}\sin x>2$

7) $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$

8) $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$

9) $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$

10) $\frac{2\sin 2x}{ctgx}+3\cos^2 x=1-2\cos x$

Вариант №2

1.Решите уравнение

а) $\sin x=-1$; б) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $tgx=-\sqrt{3}$.

2. а) $\cos^2 x-\cos x-2=0$; б) $3\cos^2 x-2\sin x+2=0$.

3. а) $\sin x+\cos x=0$; б) $3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

4. а) $\cos x=-0,5$; б) $\sin x=\frac{1}{4}$; в) $tg\,x=2$

5 а) $\sin x-\cos x=1$; б) $2\cos^2 x-\sin 4x=1$.

6 Решите неравенство

а) $\sin x>0,5$; б)$\cos x<0,5$; $tg\,x\geq -3$.

г) $2\sin^2 x-\cos x>2$

7) $ctg\,x-\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}$

8) $\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1$

9) $8-4\sin^2 x=\sin 2x\,ctgx-9\cos x$

10) $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$

Контрольная работа№6 по теме

«Декартовы координаты»

Вариант № 1

1	Даны точки A(0;1;0), B(1;2;0), C(6,0,4), D(0;5;-7), E(0;0;-4), F(-1,0,0). Какие из этих точек лежат 1) на осях x; y; z; 2)в плоскостях xy; xz; yz?
2	Найдите расстояние между точками A и B, если A(2; -4; 6); B(-2;0;4).
3	Докажите, что четырёхугольник ABCD является параллелограммом,

	если A(2;1;3), B(1;0;7), C(-2;1;5), D(-1;2;1).
4	Даны начало отрезка A(4;5;2), его конец B(-1;3;-2). Найдите координаты середины отрезка.
5	Найдите координаты вершины D параллелограмма ABCD, если известны координаты трёх других его вершин: A(4;2;-1), B(1;-3;2), C(-4;2;1).

Вариант № 2

1	Даны точки A(-3;5;0), B(0;7;0), C(8,0,0), D(0;0;-1), E(0;5;-3), F(-4,0,2). Какие из этих точек лежат 1) на осях x; y; z; 2)в плоскостях xy; xz; yz?
2	Найдите расстояние между точками A и B, если A(3; -4; 6); B(-3;1;0).
3	Докажите, что четырёхугольник ABCD является ромбом, если A(0;2;0), B(1;0;0), C(2;0;2), D(1;2;2).
4	Даны середина отрезка C(-1;3;2), его конец B(2;-2;1). Найдите координаты начала отрезка.
5	Найдите координаты вершины D параллелограмма ABCD, если известны координаты трёх других его вершин: A(1;-1;0), B(0;1;-1), C(-1;0;1).

Контрольная работа№7 по теме
«Координаты и вектора»
Вариант № 1

1	При каких значениях n данные векторы перпендикулярны, если $\vec{a}(6;-3;12)$; $\vec{b}$ (-2;6;3n)?
2	Даны векторы $\vec{a}$ (5;n;4) и $\vec{b}$ (2;3;m). При каких значениях n и m эти векторы коллинеарны?
3	Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку B и перпендикулярна прямой AB, если A(2;-1;3);B(3;4;-2).
4	Найдите точку пересечения трёх плоскостей, заданных уравнениями: x-y=4; y+z=2; x-z=3.
5	Даны точки A(1;2;3);B(2;3;1); C(3;1;2). Найдите cos <BAC.

Вариант № 2

1	При каких значениях n данные векторы перпендикулярны, если $\vec{a}(5;-4;10)$; $\vec{b}$ (2;-8;2n)?
2	Даны векторы $\vec{a}$ (1;n;3) и $\vec{b}$ (-1;2;m). При каких значениях n и m эти векторы коллинеарны?
3	Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB, если A(-3;-2;1);B(1;-2;2).
4	Найдите точку пересечения трёх плоскостей, заданных уравнениями: x-y=6; y+z=3; x-z=4.
5	Даны точки: A(2;7;-3); B(1;0;3); C(-3;-4;5). Найдите cos <ABC.

Контрольная работа № 8 по теме «Производная».

Вариант 1

1	y=$1{,}5x^4-2x^3+3x-2$	**6**	y=$\left(2x-x^2\right)\sqrt{x}$
2	y=$6x^2-\frac{1}{x^3}+4\sqrt{x}$	**7**	y=$\frac{7x-2}{x^2}$
3	y=$\frac{x^2}{4}-4x^3+\frac{x}{2}$	**8**	y=$\frac{3x^5-2x}{5x^3+4}$
4	y=$(2x-5)(4x+3)$	**9**	y=$\frac{x^2+3}{\sqrt{x}}$
5	y=$(4x^2-3)(2x^3+1)$	**10**	y=$\frac{4-2\sqrt{x}}{x}$

Вариант 2

1	y=$2{,}5x^2+5x^4-7x-4$	**6**	y=$\left(4x-x^2\right)2\sqrt{x}$
2	y=$3x^3-\frac{1}{x^4}+6\sqrt{x}$	**7**	y=$\frac{6x-1}{x^3}$
3	y=$\frac{x^3}{3}+2x^4-\frac{x}{3}$	**8**	y=$\frac{4x^3+5x}{6x^2-3}$
4	y=$(5x-4)(3x+2)$	**9**	y=$\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$
5	y=$(3x^2+4)(3x^3-2)$	**10**	y=$\frac{2-4\sqrt{x}}{x}$

Контрольная работа №9 по теме «Применение производной»

№ 1

1. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=2x^3-4x$ в точке $x_0=-2$
2. Вычислить значение функции $f(x)=x^6-3x^5+2x^4-5x+2$ в точке $x=2{,}02$
3. Вычислить значение выражения под корнем $\sqrt{9{,}0018}$
4. Вычислить значение выражения в степени $0{,}981^{16}$
5. Вычислить значение тригонометрического выражения sin x= 64°
6. Точка движется по закону $x(t)=3t^3-2t^2+4t$. Определить $\upsilon(t)$, $a(t)$ при $t=2$

№ 2

1. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=3x^3-2x$ в точке $x_0=-1$
1. Вычислить значение функции $f(x)=2x^6-4x^5+3x^3-x+4$ в точке $x=2{,}03$
2. Вычислить значение выражения под корнем $\sqrt{9{,}0036}$
3. Вычислить значение выражения в степени $0{,}991^{18}$

4. Вычислить значение тригонометрического выражения cos x= 64°
5. Точка движется по закону $x(t)=5t^3-4t^2+3t$. Определить $\upsilon(t)$, $a(t)$ при $t=1$

Контрольная работа №10 по теме «Применение производной к исследованию функций».

Вариант №1.

1. Найти стационарные точки функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 – 1$.

2. Найти экстремумы функции

   а) $f(x) = x^3 + 3x^2 – 2x + 2$; б) $f(x) = 2e^{3x} – 3e^{2x}$.

3. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^4 – 18x^2$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 – 1$ на отрезке [-1; 2].

5. Исследовать функцию $f(x) = x^3 – 3x$ и построить ее график.

Вариант №2.

1. Найти стационарные точки функции $f(x) = x^3 – x^2 + 1$.

2. Найти экстремумы функции

   а) $f(x) = x^3 – 3x^2 + 2x + 4$; б) $f(x) = 3e^{2x} – 2e^{3x}$.

3. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 + 3x^2 – 24x + 1$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3– x^2 + 1$ на отрезке [-2; 1].

5. Исследовать функцию $f(x) = x^4 – 2x^2$ и построить ее график.

Контрольная работа № 11 по теме «Призма и параллелепипед».

Вариант № 1

1	В прямой треугольной призме стороны основания равны 12см, 16см, 24см, а высота призмы 20см. Найдите площадь сечения, проведённого через боковое ребро и меньшую высоту основания.

2	Боковая поверхность правильной четырёхугольной призмы равна 36см², а полная поверхность 54см². Найдите высоту.
3	Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: 2; 3; 6.
4	В прямом параллелепипеде стороны основания 8см и 12см образуют угол в 30°, боковое ребро 6см. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.

Вариант № 2

1	В правильной четырёхугольной призме площадь основания 64см², а высота равна $\sqrt{41}$ см. Найдите диагональ призмы.
2	В прямой треугольной призме все рёбра равны. Боковая поверхность равна 48м². Найдите высоту.
3	Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: 6; 6; 7.
4	В прямом параллелепипеде стороны основания 6см и 10см образуют угол в 60°, боковая поверхность 180см². Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.

Контрольная работа № 12 по теме «Пирамида».

	Вариант 1
1	Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 8 и $4\sqrt{5}$см. каждое боковое ребро равно 10см. Вычислите высоту пирамиды.
2	Боковое ребро пирамиды разделено на 5 равных частей. Через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 500см². Найдите площади сечений.
3	Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 8см. Стороны оснований равны 16 и 4 см. Найдите боковое ребро пирамиды.
4	Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна $\sqrt{17}$см. Стороны оснований 4 и 8см. Найдите площадь диагонального сечения.
	Вариант 2
1	Основание пирамиды – ромб с диагоналями 12 и 16см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 12см. Найти боковую поверхность пирамиды.
2	Высота пирамиды 15см. Площадь основания равна 450см². На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, если площадь сечения 50см².
3	В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде высота равна 4см, а стороны основания 6 и 10см. Найдите диагональ этой пирамиды.
4	В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде стороны

	основания 4 и 10см. Высота равна 6см. Найдите полную поверхность.

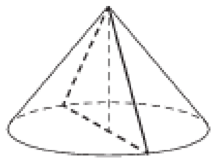
Контрольная работа № 13 по теме «Тела и поверхности вращения».

Вариант 1.

1. Высота конуса равна 96, а диаметр основания — 56. Найдите образующую конуса.

2. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 80π, а высота — 8 . Найдите диаметр основания.

3. Диаметр основания конуса равен 60, а длина образующей — 50. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



4. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен 120^0. Найдите:

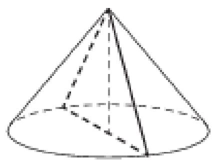
а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми 30^0;

б) площадь боковой поверхности конуса.

5. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь основания цилиндра равна 16π см^2. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 2.

1. Высота конуса равна 64, а диаметр основания — 96. Найдите образующую конуса.
2. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 56π, а высота — 7 . Найдите диаметр основания.
3. Диаметр основания конуса равен 54, а длина образующей — 45. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



4. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите:

а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми 60^0;

б) площадь боковой поверхности конуса.

5. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого 4 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Контрольная работа № 14 по теме «Объём многоугольника».

Вариант 1

1. – прямоугольный параллелепипед с измерениями 4 см, 6 см и 10 см. Его объем равен:

1. 240 ;
2. 80;
3. 124 ;
4. 248.

2. Запишите теорему (с формулами):

1) об объеме прямого параллелепипеда;

2) об объеме *n*-угольной пирамиды.

3. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна 8 см, боковое ребро – 5 см. Найдите объем пирамиды.

4. Найдите объем правильного тетраэдра с ребром 1 см.

5. В основании параллелепипеда лежит квадрат со стороной 4 см, боковое ребро равно см и образует с двумя смежными ребрами углы по . Найдите объем параллелепипеда.

Вариант 2

1. – прямоугольный параллелепипед с измерениями 9 см, 9 см и 10 см. Его объем равен:

1. 252 ;
2. 270;
3. 810 ;
4. 504 .

2. Запишите теорему (с формулами):

1) об объеме наклонного параллелепипеда;

2) об объеме треугольной пирамиды.

3. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна 12 см, боковое ребро – 10 см. Найдите объем пирамиды.

4. Найдите объем правильного тетраэдра с ребром см.

5. В основании параллелепипеда лежит квадрат со стороной 3см, боковое ребро равно 5 см и образует с двумя смежными ребрами углы по 45. Найдите объем параллелепипеда.

Контрольная работа № 15 по теме «Объём тел вращения».

Вариант № 1

1	20 метров алюминиевой проволоки имеет массу 96,8г. Найдите диаметр проволоки, если её плотность равна $2{,}7 \cdot 10^3$кг/м^3.
2	Куча зерна имеет коническую форму, радиус основания которой 3м, а образующая 10м. Найдите объём зерна.
3	Высота усечённого конуса равна 5. Радиус одного основания в 2 раза больше другого, а образующая наклонена под углом в 60° к основанию. Найдите объём.
4	Чугунные шары весят каждый 6кг. Найти диаметр каждого шара, если его плотность $7{,}2 \cdot 10^3$кг/м^3.
5	Свинцовый шар, диаметр которого 30см, переплавляют в шарики, диаметры которых в 5 раз меньше. Сколько таких шариков получится?

Вариант № 2

1	Погонный метр верёвки диаметром 18мм весит 0,52кг. Найдите его плотность.
2	Стог сена имеет коническую форму, радиус основания которого 4м, а образующая 10м. Найдите объём сена.
3	Высота усечённого конуса равна 10. Радиус одного основания в 2 раза больше другого, а образующая наклонена под углом в 45° к основанию. Найдите объём.
4	Требуется переплавить в один шар два шара диаметрами 20см и 30см. Найти диаметр нового шара.
5	Имеется кусок свинца массой 3кг. Сколько шариков диаметром 1,5см можно отлить из свинца. Плотность свинца равна 11,4 кг/см^3.

Контрольная работа № 16 по теме «Корни и степени»

Вариант № 1

1	Вычислить: $49^{\frac{1}{2}}$; $1000^{\frac{1}{3}}$
2	Вычислить: $\frac{5^4 \cdot 49^{-3}}{7^{-7} \cdot 25^3}$
3	Вычислить: $32^{\frac{-1}{5}}$
4	Сравните: $5^{\frac{1}{2}}$ и $5^{\frac{1}{3}}$
5	Упростить: $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{-1}{6}}$; $y^{\frac{-5}{6}} : y^{\frac{1}{3}}$
6	Упростить: $\left(c^{\frac{-1}{2}}\right)^4$
7	Упростить: $y^{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{y^2}$

8	Найдите значение выражения: $2^{1,3} \cdot 2^{-0,7} \cdot 4^{0,7}$
9	Найдите значение выражения: $8^{\frac{-1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{2}$
10	Найдите значение выражения: $(\frac{1}{36} \cdot 0{,}04)^{\frac{-1}{2}}$
11	Вычислить: $216^{\frac{-1}{3}} \cdot (\frac{1}{6})^{-2}$ -$5^{-1} \cdot (\frac{1}{25})^{\frac{-1}{2}}$
12	Найдите значение выражения: $\frac{x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}$ при x=1,44

Вариант № 2

1	Вычислить: $27^{\frac{1}{3}}$; $625^{\frac{1}{4}}$
2	Вычислить: $\frac{81^{12} \cdot 10^{-7}}{10^{-5} \cdot 27^{17}}$
3	Вычислить: $16^{\frac{-1}{4}}$
4	Сравните: $7^{\frac{1}{3}}$ и $7^{\frac{2}{6}}$
5	Упростить: $d^{\frac{2}{5}} \cdot d^{\frac{-1}{5}}$; $m^{\frac{1}{3}} : m^{\frac{2}{3}}$
6	Упростить: $(p^{\frac{-3}{4}})^4$
7	Упростить: $\sqrt[4]{c^3} \cdot c^{\frac{1}{4}}$
8	Найдите значение выражения: $25^{0,3} \cdot 5^{1,4} \cdot 625^{0,25}$
9	Найдите значение выражения: $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
10	Найдите значение выражения: $(5^{-3} \cdot \frac{1}{64})^{\frac{-1}{3}}$
11	Вычислить: $(\frac{1}{4})^{\frac{-1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}}$ -$2^{-1} \cdot (\frac{1}{25})^{\frac{-1}{2}} \cdot 8^{\frac{-1}{3}}$
12	Найдите значение выражения $\frac{m^{\frac{2}{3}}-2{,}25}{m^{\frac{1}{3}}+1{,}5}$ при m=8

Контрольная работа№17 по теме
«Решение показательных уравнений, неравенств и систем уравнений»
Вариант № 1

1	Решить уравнение: $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$
2	Решить уравнение: $2^{2x}-8^{x+1}=0$
3	Решить уравнение: $4^{x+1}+4^{x}=320$
4	Решить уравнение: $36^{x}-4\cdot 6^{x}-12=0$
5	Решить уравнение: $5\cdot 9^{x}+9^{x-2}=406$
6	Решить неравенство: $1{,}6^{x}<2{,}56$
7	Решить неравенство: $0{,}4^{2x+1}>0{,}16$
8	Решить неравенство: $\left(\frac{1}{36}\right)^{x}-5\cdot 6^{-x}-6\leq 0$

9	Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3^{2y-x} = \dfrac{1}{81} \\ 3^{x-y+2} = 27 \end{cases}$
10	Решить графически: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x} \geq 2x+1$

Вариант № 2

1	Решить уравнение: $\sqrt{3^x}\cdot\sqrt{2^x}$=36
2	Решить уравнение: $2^{x^2+3x-0,5}$=$4\sqrt{2}$
3	Решить уравнение: $3\cdot5^{x+3}$+$2\cdot5^{x+1}$=77
4	Решить уравнение: 49^x-$8\cdot7^x$+7=0
5	Решить уравнение: $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$+$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$=162
6	Решить неравенство: $1,4^x$>1,96
7	Решить неравенство: 3^{2-x}<27
8	Решить неравенство: 4^x-2^{x+1}-8>0
9	Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2^{x+y} = \dfrac{1}{16} \\ 2^{x+2y-1} = 1 \end{cases}$
10	Решить графически: $2^x \geq 3-x$

Контрольная работа № 18 по теме «Логарифмические уравнения и неравенства».

Вариант №1

1	Найти число х: а)$\ell oq_6 x=2$; б)$\ell oq_x \frac{1}{2}=-2$; в)$\ell oq_2 x= \ell oq_2 6+ \ell oq_2 \frac{1}{3}$
2	Упростить выражение с помощью основного тригонометрического тождества: а)$1,2^{\ell og_{1,2}5}$; б)$3^{1+\ell og_3 2}$
3	Вычислить: а)$\ell oq_2 40- \ell oq_2 5$; б)$\dfrac{\ell og_3 64}{\ell og_3 4}$
4	Решить уравнение: а)$\ell oq_6(11x+3)=2$; б)$\ell q\, x= \ell q12+ \frac{1}{2}\ell q4$
5	Решить неравенство: а)$\ell oq_{\frac{1}{2}} x\geq-2$; б)$\ell oq_7(4x+1)<2$
6	Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+y=34 \\ \ell og_2 x+\ell og_2 y=6 \end{cases}$

Вариант №2

1	Найти число х: а)$\ell oq_3 x=4$; б)$\ell oq_x \frac{1}{2}=-3$; в)$\ell oq_3 x=\ell oq_3 2-\ell oq_3 \frac{1}{2}$
2	Упростить выражение с помощью основного тригонометрического тождества: а)$1{,}4^{\ell og_{1,4}7}$; б)$4^{1+\ell og_4 3}$
3	Вычислить: а)$\ell oq_3 36-\ell oq_3 4$; б)$\frac{\ell og_2 81}{\ell og_2 3}$
4	Решить уравнение: а)$\ell oq_5(10x+5)=3$; б)$\ell q\, x=\ell q4+\frac{1}{2}\ell q9$
5	Решить неравенство: а)$\ell oq_{\frac{1}{3}} x\le -3$; б)$\ell oq_8(2x+6)>2$
6	Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+y=17 \\ \ell og_3 x-\ell og_3 y=\ell og_3 33 \end{cases}$

Практические занятия по математике предназначены для студентов СПО по специальности: **23.01.17 « Мастер по ремонту и обслуживанию автомобилей».** На курс отведено 52 часа. Предлагаемый курс основан на знаниях и умениях, полученных студентами при изучении математики на теоретических занятиях.

Цели и задачи практических занятий:

- развитие познавательных интересов, интеллектуальных и творческих способностей в процессе решения задач и самостоятельного приобретения новых знаний;
- воспитание духа сотрудничества в процессе совместного выполнения задач, выполнения самостоятельных работ;
- использование приобретенных знаний и умений для решения практических, жизненных задач.

Курс практических занятий прежде всего ориентирован на развитие у студентов интереса к занятиям, на организацию самостоятельного познавательного процесса и самостоятельной практической деятельности. В сборнике представлена система задач постепенно возрастающей сложности за курс математики средней школы. Занятия по решению теоретических задач дают возможность обеспечить студентов материалами для самостоятельной работы. С этой целью после разбора двух- трех ключевых задач на занятии целесообразно дать комплект задач по данной теме для самостоятельной работы с обязательным полным письменным оформлением.

Практические занятия проводятся в кабинете математики. Практические занятия включают следующие структурные элементы:

- ✓ инструктаж, проводимый преподавателем,
- ✓ самостоятельная деятельность студентов,
- ✓ анализ и оценка выполненных работ.

Выполнению практических работ предшествует домашняя подготовка с использованием соответствующей литературы (учебники, лекции, методические пособия и указания и др.) и проверка знаний студентов как критерий их теоретической готовности к выполнению задания.

Контроль и оценка результатов выполнения студентами практических работ направлены на проверку усвоения всех элементов содержания курса математики, освоение умений, навыков, развития общих компетенций, определённых программой учебной дисциплины.

Форма контроля выполнения практических работ

Отчеты по практическим работам оформляются в письменном виде аккуратно (в тетради для практических работ) и должны включать в себя следующие пункты:

- ✓ название практической работы;
- ✓ цель практической работы;
- ✓ выполненные задания своего варианта с указанием ответов.

Оценки за выполнение заданий на практических занятиях выставляются по пятибалльной системе и учитываются как показатели текущей успеваемости студентов.

Тематика практических занятий:

Практическое занятие №1 «Действительные числа. Приближенные вычисления»
Практическое занятие №2 «Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости». «Параллельное проектирование». «Изображения пространственных фигур».
Практическое занятие №3 «Радианная мера угла. Вращательное движение»
Практическое занятие №4 «Формулы суммы и разности»
Практическое занятие №5«Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции. Точки экстремума»
Практическое занятие №6 «Решение тригонометрических уравнений».
Практическое занятие №7 «Использование векторов при решении математических и прикладных задач
Практическое занятие №8 «Решение задач координатным методом»
Практическое занятие №9 «Правила вычисления производных»
Практическое занятие №10 «Вычисление производных сложной функции»
Практическое занятие №11«Нахождение наименьшего, наибольшего значения функции на отрезке»

Практическое занятие №12 «Построение графиков функций»
Практическое занятие №13 «Вычисление определенных интегралов различными способами»
Практическое занятие №14 «Вершины, ребра, грани многогранника»
Практическое занятие №15 «Параллелепипед. Куб».
Практическое занятие №16 «Сечения куба, призмы, пирамиды»
Практическое занятие №17 «Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр)»
Практическое занятие №18 «Шар и сфера, их сечения»
Практическое занятие №19 «Вычисление объёмов тел и поверхностей вращения»
Практическое занятие №20 «Подобие тел. Отношения объёмов подобных тел»
Практическое занятие №21 «Подобие тел. Отношения площадей поверхностей подобных тел»
Практическое занятие №22«Степени с действительными показателями, их свойства»
Практическое занятие №23«Преобразование показательных выражений»
Практическое занятие №24«Логарифмическая функция, её график и свойства»
Практическое занятие №25«Преобразование логарифмических выражений»
Практическое занятие №26 «Решение задач на перебор вариантов»

Практическое занятие № 1
Действительные числа. Приближенные вычисления

Цель работы:
студент должен:
знать:

- формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешности суммы, разности, произведения и частного приближенных значений чисел;

уметь:

- вычислять сумму, разность, произведение и частное приближенных значений чисел.

Сведения из теории:
Сложение приближенных значений чисел
Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b,$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.
Граница относительной погрешности сумы вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a+b}=\frac{\Delta(a+b)}{a+b}.$$

Пример 1.

Найти сумму S приближенных значений чисел 6,8±0,05; 4,3±0,05 и 3,575±0,0005.

Решение:

вычислим сумму заданных чисел и сумму их погрешностей:

$$S=6{,}8+4{,}3+3{,}575=14{,}675;$$

$$\Delta S=0{,}05+0{,}05+0{,}0005=0{,}1005.$$

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах 0,05<0,1005<0,5. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц S=14,675≈15.

Вычитание приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\Delta(a\text{-}b)=\Delta a+\Delta b.$$

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a\text{-}b}=\frac{\Delta a+\Delta b}{a-b}.$$

Пример 2.

Вычислить разность двух приближенных значений чисел a=5,863±0,0005 и b=2,746±0,0005. Найти $\Delta(a\text{-}b)$ и $\varepsilon_{a\text{-}b}$.

Решение:

вычисляем границу абсолютной погрешности разности a-b:

$\Delta(a\text{-}b)$=0,0005+0,0005=0,001.

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, так как $\Delta(a\text{-}b)$>0,0005. Итак, a-b=3,117≈3,12. Абсолютная погрешность разности 0,001. В приближенном числе 3,12 все цифры верные.

Находим относительную погрешность разности:

$$\varepsilon_{a\text{-}b}=\frac{0{,}001}{3{,}12}=0{,}00032\approx0{,}03\%.$$

Умножение приближенных значений чисел

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного) сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Формулы для границ абсолютной и относительной погрешности некоторых функций приведены в таблице 1.

Таблица 1. Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей.

№ п/п	Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности
1	$y=ab$	$\Delta y=\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$
2	$y=abc$	$\Delta y=\lvert bc\rvert\cdot\Delta a+\lvert ac\rvert\cdot\Delta b+\lvert ab\rvert\cdot\Delta c$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}$
3	$y=a^n$	$\Delta y=n\,a^{n-1}\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=n\frac{\Delta a}{a}$
4	$y=a^2$	$\Delta y=2a\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=2\frac{\Delta a}{a}$
5	$y=a^3$	$\Delta y=3a^2\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=3\frac{\Delta a}{a}$
6	$y=\sqrt{a}$	$\Delta y=\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{2a}$
7	$y=\sqrt[3]{a}$	$\Delta y=\frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{3a}$
8	$y=\frac{a}{b}$	$\Delta y=\frac{\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$

Пример 3.

Найти верные цифры произведения приближенных значений чисел a=0,3862 и b=0,8.

Решение:

имеем 0,3862·0,8=0,30896. Границы абсолютной погрешности сомножителей равны 0,00005 и 0,05. По формуле $\varepsilon_{ab}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность произведения:

$$\varepsilon_{ab}=\frac{0{,}00005}{0{,}3862}+\frac{0{,}05}{0{,}8}=0{,}063\ .$$

Находим границу абсолютной погрешности произведения:

$\Delta(ab)$=0,30896·0,063=0,0195;

0,005<0,0195< 0,05.

Полученный результат означает, что в произведении одна верная цифра (в разряде десятых): 0,30896≈0,3.

Пример 4.

Вычислить объем цилиндра $V=\pi R^2H$, если R=45,8 см, H=78,6 см.

Решение:

по формуле объема цилиндра, имеем

$$V=\pi\cdot 45{,}8^2\cdot 78{,}6=517000\ (\text{см}^3).$$

Используя формулу $\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$ и полагая $\pi \approx 3{,}14$, находим относительную погрешность:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{2\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{2 \cdot 0{,}05}{45{,}8} + \frac{0{,}05}{78{,}6} = 0{,}0044 .$$

Находим границу абсолютной погрешности:

$$\Delta V = V \cdot \varepsilon_V = 517\,000 \cdot 0{,}0044 = 2270 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Верными цифрами являются 5 и 1.

Деление приближенных значений чисел

Пример 5.

Найти границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел a=8,36±0,005 и b=3,72±0,004.

Решение:

имеем 8,36:3,72=2,25.

По формуле $\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность частного:

$$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0{,}005}{8{,}36} + \frac{0{,}004}{3{,}72} = 0{,}002 = 0{,}2\% .$$

Находим границу абсолютной погрешности частного:

$\Delta(a/b)$=2,25·0,002=0,0045.

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные.

Пример 6.

Вычислить $X = \frac{a}{b+c}$, если известно, что a=7,2±0,05, b=3,46±0,03, c=5,09±0,04.

Решение:

находим $X = \frac{a}{b+c} = \frac{7{,}2}{3{,}46 + 5{,}09} = 0{,}844$;

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b + \Delta c}{b+c} = \frac{0{,}05}{7{,}2} + \frac{0{,}03 + 0{,}04}{8{,}55} = 0{,}015 ;$$

$\Delta X = X \cdot \varepsilon_X$=0,844·0,015=0,0127; X=0,844±0,0127 или $X \approx$0,84±0,01.

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите сумму, разность, произведение и частное приближенных значений чисел:

1 вариант $\sqrt{13}.\sqrt{5}$ с четырьмя значащими цифрами.	**2 вариант** 0,456±0,0005 и 3,35±0,005.	**3 вариант** $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами.
4 вариант 8,72 и 2,6532, границы абсолютной	**5 вариант** 6,54±0,005; 16,022±0,0005 и	**6 вариант** $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ взяв приближенные

погрешности которых соответственно равны 0,005 и 0,00005.	1,9646±0,00005.	значения корней с точностью до 0,001.
7 вариант $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}$ с четырьмя значащими цифрами.	**8 вариант** a=19,8±0,05 и b=48,4±0,03.	**9 вариант** a=68,4±0,02 и b=72,8±0,4.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите действия над приближенными значениями чисел.
2. Перечислите формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций.

Литература: [4, с. 14-18]

Практическое занятие № 2

Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение параллельного переноса и его свойства;
- формулы для параллельного переноса;

уметь:

- выполнять геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости.

Сведения из теории:

Параллельный перенос и его свойства

Наглядно *параллельный перенос* определяется как преобразование, при котором точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Такое определение не является математически строгим, потому что в нем употребляется выражение «в одном и том же направлении», которое само нуждается в точном определении. В связи с этим параллельному переносу мы дадим другое, отвечающее тому же наглядному представлению, но уже строгое определение.

Введем на плоскости декартовы координаты x, y. Преобразование фигуры F, при котором произвольная ее точка $(x; y)$ переходит в точку $(x+a; y+b)$, где a и b одни и те же для всех точек $(x; y)$, называется параллельным переносом. Параллельный перенос задается формулами $x'=x+a$, $y=y+b$.

Эти формулы выражают координаты x', y' точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при параллельном переносе.

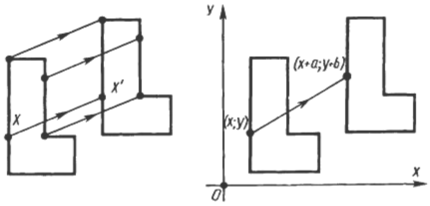


Рисунок 38. Параллельный перенос

Параллельный перенос есть движение

Действительно, две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ к $B(x_2; y_2)$ переходят при параллельном переносе в точки $A'(x_1+a; y_1+b)$, $B'(x_2+a; y_2+b)$.

Поэтому

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$A'B'^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Отсюда $AB=A'B'$. Т. о., параллельный перенос сохраняет расстояния, а значит, является движением, что и требовалось доказать.

Название «*параллельный перенос*» оправдывается тем, что при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

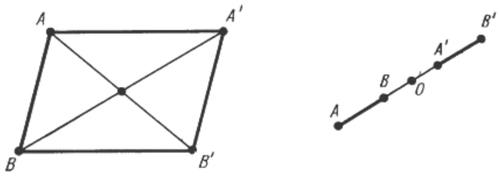


Рисунок 39. Параллельный перенос

Симметрия относительно плоскости

Симметрия относительно плоскости – это такое свойство геометрической фигуры, когда любой точке, расположенной по одну сторону плоскости, всегда будет соответствовать точка, расположенная по другую сторону плоскости, а отрезки, соединяющие эти точки, будут перпендикулярны плоскости симметрии и делятся ею пополам.

Следует отметить, что две симметричные фигуры или две симметричные части одной фигуры при всем их сходстве, равенстве объемов и площадей поверхностей, в общем случае, неравны, т.е. их нельзя совместить друг с другом. Это разные фигуры, их нельзя заменить друг другом, например, правая перчатка, ботинок и т.д. не годятся для левой руки, ноги. Предметы могут иметь одну, две, три и т.д. плоскостей симметрии.

Например, прямая пирамида (рис. 40а, 41а), основанием которой является равнобедренный треугольник, симметрична относительно одной плоскости *P*. Призма с таким же основанием (рис. 40б, 41б) имеет две плоскости симметрии. У правильной шестиугольной призмы (рис. 40*в*, 41*в*) их семь. Тела вращения: шар, тор, цилиндр, конус и т.д. имеют бесконечное количество плоскостей симметрии.

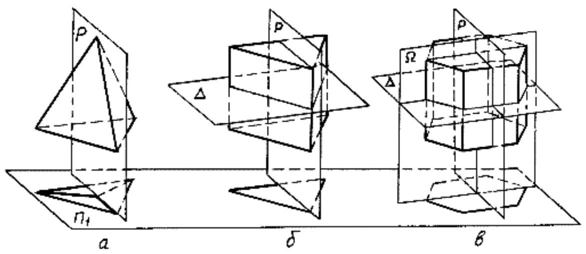


Рисунок 40. Плоскости симметрии

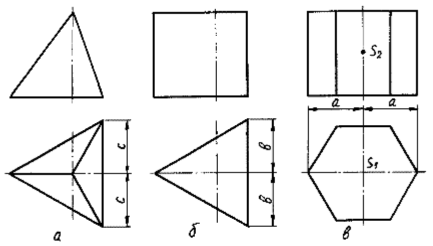


Рисунок 41. Изображение плоскостей симметрии

На чертежах плоскости симметрии изображаются тонкими штрихпунктирными линиями, являющимися как бы следами этих плоскостей. Если такой след совпадает с другой линией чертежа, например, с контурной, то она проводится в виде тонких штрихов, выводимых за контур изображения на 5 – 8 мм. На чертеже наносятся следы только тех плоскостей симметрии, которые перпендикулярны плоскости проекций данного изображения.

При наличии нескольких подобно расположенных плоскостей симметрии, как у призмы (рис. 40*в*), на чертеже изображается только одна взаимно перпендикулярная пара следов, по возможности тех, которые параллельны плоскостям проекций.

Для геометрических тел с плоскостями симметрии, параллельными их основаниям, например для призм, следы плоскостей симметрии на чертежах показывать не принято.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

2) Докажите, что при движении: а) параллелограмм отображается на параллелограмм; б) трапеция отображается на трапецию; в) ромб отображается на ромб; г) прямоугольник отображается на прямоугольник, а квадрат – на квадрат.

3) На сторонах *AB* и *CD* параллелограмма *ABCD* построены квадраты (плоскости квадратов перпендикулярны плоскости параллелограмма). Используя параллельный перенос, докажите, что отрезок, соединяющий центры этих квадратов, равен и параллелен стороне *AD*.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение параллельного переноса и перечислите его свойства.
2. Запишите формулы для параллельного переноса.

Литература: [16]

Практическое занятие № 2
Параллельное проектирование

Цель работы:
студент должен:
знать:
- свойства параллельного проектирования;

уметь:
- строить фигуры с помощью параллельного проектирования.

Сведения из теории:
Параллельное проектирование
Пусть даны плоскость α и прямая l, пересекающая плоскость a. Возьмем произвольную точку пространства A_1 и проведем через эту точку прямую l_1, параллельную l. Прямая l_1 пересечет плоскость α в некоторой точке A. Полученная таким образом точка A называется проекцией точки A на плоскость α при проектировании параллельно прямой l. Обычно кратко говорят, что точка A есть параллельная проекция точки A_1.

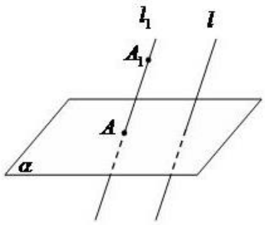


Рисунок 42. Параллельное проектирование

Параллельной проекцией пространственной фигуры $Ф_1$ называется множество Ф параллельных проекций всех точек данной фигуры.
Свойства параллельного проектирования
1) Проекция прямой есть прямая.
2) Проекции параллельных прямых параллельны.
3) Отношение проекций двух параллельных отрезков равно отношению проектируемых отрезков.

Ортогональное проектирование
Частным случаем параллельного проектирования является *ортогональное проектирование*

Пусть даны плоскость α и прямая l, перпендикулярная α. Возьмем произвольную точку пространства A_1 и проведем через нее прямую l_1 параллельную l (и, следовательно, перпендикулярную плоскости α). Прямая l_1 пересечет плоскость α в некоторой точке A.

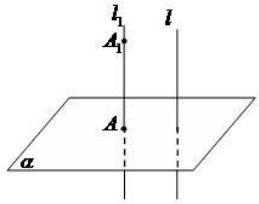


Рисунок 43. Ортогональное проектирование

Полученная точка A называется ортогональной проекцией точки A_1 на плоскость α.

Ортогональной проекцией фигуры Φ_1 на плоскость α называется множество Φ ортогональных проекций всех точек данной фигуры Φ_1. Как частный случай параллельного проектирования, ортогональное проектирование обладает всеми свойствами параллельного проектирования.
Свойство ортогональной проекции плоского многоугольника
Площадь s ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость α равна площади S проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла γ между плоскостью многоугольника и плоскостью α:

$$s = S \cdot \cos(\gamma).$$

Пример 112.
Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом $\gamma = 30^0$ к плоскости ее основания. Найти площадь образующегося сечения, если сторона основания равна 6 см.
Решение:
т.к. призма правильная, то ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Следовательно, плоскость основания есть проекция плоскости сечения.
Т.к. в основании правильный треугольник, то его площадь равна:

$$s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Используя свойство ортогональной проекции, имеем:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\gamma}.$$

Зная, что сторона основания равна 6 см и угол $\gamma = 30^0$, вычислим площадь:

$$S = \frac{6^2\sqrt{3}}{4\cos 30} = \frac{36\sqrt{3}}{4\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{36}{2} = 18.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Каковы проекции двух прямых на плоскость, если: а) прямые пересекаются; б) прямые скрещиваются; в) прямые параллельны.

2) На модели куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите проекции на плоскость грани AA_1B_1B отрезков C_1D_1, AD, C_1D и DB_1, треугольников C_1CD и ACD, квадрата BB_1C_1C.

3) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а острый угол 60^0. Найдите площадь проекции этого треугольника на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол 30^0.

4) Стороны треугольника равны 3,9 см, 4,1 см и 2,8 см. Найдите площадь его проекции на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол 60^0.

Контрольные вопросы:

1. Что называется параллельной проекцией?
2. Перечислите свойства параллельного проектирования.
3. Что называется ортогональной проекцией фигуры?

Литература: [16]

Практическое занятие № 2
Изображения пространственных фигур

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойства параллельного проектирования;

уметь:

- изображать пространственные фигуры на плоскости с помощью параллельного проектирования.

Сведения из теории:

Изображение пространственных фигур на плоскости

Для изображения пространственных фигур на плоскости обычно пользуются параллельным проектированием.

Рисунок 44. Изображение пространственных фигур на плоскости

Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками.

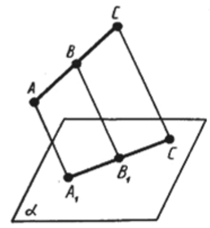


Рисунок 45. Изображение отрезка на плоскости

Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость a по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

Пример 113.

Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

Решение:

при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции этой стороны. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Построить изображение правильного треугольника ABC , изображение высоты BH и биссектрисы AK.

2) Трапеция $ABCD$ – параллельная проекция равнобедренной трапеции. Построить ось симметрии и высоту данной трапеции.

3) Начертите параллельную проекцию ромба $ABCD$, имеющего угол A=60^0. Постройте изображение высоты этого ромба, проведенной из вершины острого угла.

Контрольные вопросы:

1. Что называется параллельной проекцией?
2. Перечислите свойства параллельного проектирования.
3. Что является параллельной проекцией отрезка, треугольника, прямоугольника, квадрата, окружности?
4. Какие величины не изменяются при параллельном проецировании? (длина отрезка, градусная мера углов, отношения длин отрезков, отношение площадей двух фигур)?
5. Может ли при параллельном проецировании параллелограмма получиться трапеция и наоборот?

Литература: [10, с. 170-175]

Практическое занятие № 3

Радианная мера угла. Вращательное движение

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определения радиана, синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента;
- значения тригонометрических функций некоторых аргументов;
- знаки значений тригонометрических функций по координатным четвертям;

уметь:

- переводить значения углов из радианной меры угла в градусную меру и наоборот;
- вычислять простейшие тригонометрические выражения.

Сведения из теории:

Радианная мера

Угол в 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности.

Радианная и градусная меры связаны между собой зависимостью$180^0=\pi$ радиан; угол в $n^0=\frac{\pi n}{180^0}$ радиан.

Значения тригонометрических функций могут быть найдены так, как это делалось в курсе геометрии, из прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1 и по очереди задаваемых углов: 30^0, 45^0, 60^0.

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям:

Номер координатной четверти	I	II	III	IV
sinα	+	+	–	–
cosα	+	–	–	+
tgα	+	–	+	–
ctgα	+	–	+	–

Единственная четная функция – косинус

$$cos(-\alpha)=cos\alpha.$$

Все остальные основные тригонометрические функции нечетные:

$$sin(-\alpha)= -sin\alpha;$$

$$tg(-\alpha)= -tg\alpha;$$

$$ctg(-\alpha)= -ctg\alpha.$$

Таблица 2. Значения основных тригонометрических функций

Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Градусная мера угла	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Радианная мера угла	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Градусная мера угла	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Пример 30.

Вычислите: $\sin 405^0$.

Решение:

полный круг – 360^0 можно «отбросить»:

$$\sin 405^0=\sin(405^0-360^0)=\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 31.

Выразите в радианной мере значение угла 36^0.

Решение:

чтобы «перевести» градусную меру угла в радианную, необходимо заданное значение умножить на $\frac{\pi}{180^0}$, т.о. получим

$$36^0=\frac{36^0\pi}{180^0}=\frac{\pi}{5}.$$

Пример 32.

Выразите в градусной мере значение угла $\frac{2\pi}{5}$.

Решение:

чтобы «перевести» радианную меру угла в градусную, необходимо заданное значение умножить на $\frac{180^0}{\pi}$, т. о. получим

$$\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{180^0}{\pi}=\frac{360^0}{5}=72^0.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 60^0; $\frac{\pi}{6}$. №2. Вычислите: $\sin 2010^0+4tg(-855^0)+$ $+\sqrt{3}\cos(-1590^0)$.	**2 вариант** №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 180^0; $\frac{3\pi}{5}$. №2. Вычислите: $\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)-6\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right)+$ $+2tg\frac{15\pi}{4}-\sqrt{3}ctg\frac{23\pi}{6}$.	**3 вариант** №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 270^0; $\frac{5\pi}{36}$. №2. Вычислите: $\sin(-390^0)+4tg(-405^0)+$ $+\sqrt{3}\cos^2(-420^0)$.
4 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 120^0; $\frac{3\pi}{4}$. №2. Вычислите: $\sin 1500^0+tg(-765^0)+$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(1845^0)$.	**5 вариант** №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 310^0; $\frac{\pi}{3}$. №2. Вычислите: $\sqrt{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-6\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)+$ $+2tg\frac{9\pi}{4}-\sqrt{3}ctg\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$.	**6 вариант** №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 360^0; $\frac{5\pi}{4}$. №2. Вычислите: $\cos 2160^0+ctg(855^0)+$ $+\sqrt{3}\sin(-1590^0)$.
7 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере	**8 вариант** №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла:	**9 вариант** №1. Выразите в радианной (градусной) мере

значение угла: 1500^0; $\frac{3\pi}{18}$. №2. Вычислите: $\sin 2190^0 + \frac{1}{2}tg^2(-405^0) +$ $+\sqrt{3}\cos(-420^0)$.	216^0; $\frac{7\pi}{12}$. №2. Вычислите: $\sqrt{2}\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) - 6\cos^2\left(\frac{22\pi}{3}\right) +$ $+2tg\left(-\frac{15\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}ctg\frac{13\pi}{3}$.	значение угла: 90^0; $\frac{9\pi}{5}$. №2. Вычислите: $\cos 405^0 + \sqrt{3}tg(750^0) +$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(-1590^0)$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется углом в 1 радиан?
2. В каких единицах измеряются углы?
3. Перечислите значения некоторых тригонометрических функций.

Литература: [5, с. 5-7]

Практическое занятие № 4

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Цель: формирование навыков использования формул суммы и разности при преобразовании выражений.

Теоретический материал

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность косинусов двух углов равна взятому со знаком «минус» удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Сумма тангенсов двух углов: $tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$.

Разность тангенсов двух углов: $tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$

Пример 1. Вычислите $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ$.

Решение:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = 2\sin\frac{10^\circ + 50^\circ}{2}\cdot\cos\frac{10^\circ - 50^\circ}{2} = 2\sin 30^\circ\cdot\cos(-20^\circ) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ = \cos 20^\circ$$

Пример 2. Вычислите $\cos 90^\circ - \cos 30^\circ$.

Решение:

$$\cos 90^\circ - \cos 30^\circ = -2\sin\frac{90^\circ + 30^\circ}{2}\cdot\sin\frac{90^\circ - 30^\circ}{2} = -2\sin 60^\circ\cdot\sin 30^\circ = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Упражнения

1. Представьте в виде произведения:

1. $\sin 40^\circ + \sin 16^\circ$
2. $\sin 20^\circ - \sin 40^\circ$
3. $\cos 46^\circ - \cos 74^\circ$
4. $\cos 15^\circ + \cos 45^\circ$
5. $\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}$
6. $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{3\pi}{4}$
7. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\alpha$
8. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$
9. $tg 25^\circ + tg 35^\circ$
10. $tg\frac{\pi}{5} - tg\frac{\pi}{10}$

2. Докажите тождество:

1. $\frac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 6x} = tg 4x$
2. $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ = \sin 1^\circ$
3. $\cos 115^\circ - \cos 35^\circ + \cos 65^\circ + \cos 25^\circ = \sin 5^\circ$

Контрольные вопросы

1. Чему равна сумма синусов?
2. Чему равна сумма косинусов?
3. Чему равна разность синусов?
4. Чему равна разность косинусов?
5. Чему равна сумма тангенсов?
6. Чему равна разность тангенсов?

Практическое занятие № 5

Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции. Точки экстремума

Цель работы:
студент должен:
знать:

- определения возрастающей (убывающей) функции;
- определения точки максимума (минимума) функции;

уметь:

- находить промежутки монотонности функции;
- вычислять точки экстремума функции.

Сведения из теории:
Возрастание и убывание функций
Функция f возрастает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.
Функция f убывает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.
Иными словами, функция f называется возрастающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

Пример 52.
Докажите, что функция $f(x)=1/x$ является убывающей.
Решение:
область определения функции: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Рассмотрим поведение функции на каждом интервале:
$(-\infty; 0)$: $x_1=-8$, $x_2=-4$, т.е. $x_2>x_1$, тогда $f(-8)=-0{,}125$, $f(-4)=-0{,}25$, т.е $f(x_2)<f(x_1)$, а значит функция $f(x)=1/x$ является убывающей на интервале $(-\infty; 0)$.
$(0; +\infty)$: $x_1=4$, $x_2=8$, т.е. $x_2>x_1$, тогда $f(4)=0{,}\ 25$, $f(8)=0{,}125$, т.е. т.е $f(x_2)<f(x_1)$, а значит функция $f(x)=1/x$ является убывающей на интервале $(0; +\infty)$.
Однако эта функция не является убывающей на объединении этих промежутков. Например, $1>-1$, но $f(1)<f(-1)$.

При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины, включая концы (если, конечно, они входят в эти промежутки). Так, можно было сказать, что функция $f(x)=1/x$ является убывающей на отрезке $[2; 500]$. Это верно, но такой ответ неполон.

При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности.
Окрестностью точки a называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал $(2; 6)$ – одна из окрестностей точки 3, интервал $(-3{,}3; -2{,}7)$ – окрестность точки -3.

Экстремумы
Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.
Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

По определениям значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0, как правило, имеет вид гладкого «холма» или заостренного «пика». В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой или заостренной.
Для точек максимума и минимума функции принято общее название – их называют *точками экстремума*.
Значение функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название – экстремум функции). Точки максимума обозначают $x_{\max}$, а точки минимума $x_{\min}$. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно $y_{\max}$, $y_{\min}$.

Пример 53.
Начертите эскиз графика функции f, если известно, что f возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$. Какой будет точка $x=2$?
Решение:
схематично график можно изобразить в виде:

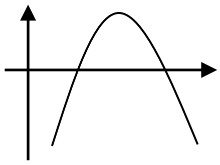


Рисунок 10. Эскиз графика

График имеет вид гладкого «холма», а значит точка $x=2$ – точка максимума.

Задания для самостоятельного решения:
Начертите эскиз графика функции f, определите вид точек, если:

1 вариант f возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$.	**2 вариант** f возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 3]$, убывает на промежутке $[2; 0]$.	**3 вариант** f возрастает на промежутке $[1; 4]$ и убывает на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[4; +\infty)$.
4 вариант f возрастает на промежутках $(-\infty; -5]$ и $[1; 5]$, убывает на	**5 вариант** f возрастает на промежутке $(-\infty; 5]$ и убывает на	**6 вариант** f возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на

промежутках [-5; 1] [5; +∞).	промежутке [5; +∞).	промежутке [0; +∞).
7 вариант *f* возрастает на промежутке [-1; 2] и убывает на промежутках (-∞; -1] и [2; +∞).	**8 вариант** *f* возрастает на промежутках (-∞; -4] и [2; 4], убывает на промежутках [-4; 2] [4; +∞).	**9 вариант** *f* возрастает на промежутках (-∞; -3] и [2; 5], убывает на промежутках [-3; 2] [5; +∞).

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке?
2. Дайте определение точке максимума (минимума) функции.

Литература: [5, с. 42-46]

Практическое занятие № 6

Решение тригонометрических уравнений

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для решения тригонометрических уравнений в общем виде и частные случаи решения;

уметь:

- решать простейшие тригонометрические уравнения.

Сведения из теории:

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение $\cos t=a$

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $\cos t=a$ не имеет решений, т.к. $|\cos t|\leq 1$ для любого t.

Пусть $|a|\leq 1$. Надо найти все такие числа t, что $\cos t=a$. На отрезке $[0; \pi]$ существует только одно решение уравнения $\cos t=a$ – это число $\arccos a$.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение также имеет единственное решение – это число $-\arccos a$.

Итак, уравнение $\cos t=a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π имеет два решения $t=\pm\arccos a$ (совпадающие при $a=1$).

Вследствие периодичности функции косинус все остальные решения отличаются от найденных на $2\pi n$, ($n\in \mathbf{Z}$), т.е. формула корней уравнения $\cos t=a$ имеет вид:

$$t=\pm\arccos a+2\pi n, \ (n \in \mathbf{Z}).$$

Пример 40.

Решите уравнение: $\cos t=1/2$.
Решение:
по формуле $t=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Поскольку $\arccos(1/2)=\pi/3$ приходим к ответу $t=\pm\pi/3+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Пример 41.
Решите уравнение: $\cos t=-0{,}2756$.
Решение:
по формуле $t=\pm\arccos(-0{,}2756)+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Значение $\arccos(-0{,}2756)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,85.
Итак, приходим к ответу $t=\pm 1{,}85+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Пример 42.
Решите уравнение: $\cos(2x-\pi/4)=1/2$.
Решение:
по формуле
$2x-\pi/4=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Поскольку $\arccos(1/2)=\pi/3$ получаем
$2x-\pi/4=\pm\pi/3+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$)
$2x=\pi/4\pm\pi/3+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Разделив обе части уравнения на 2 получим ответ: $x=\pi/8\pm\pi/6+\pi n$, ($n\in\mathbf{Z}$).

Уравнение $\sin t=a$
Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $\sin t=a$ не имеет решений, т.к. $|\sin t|\le 1$ для любого t.
При $|a|\le 1$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ уравнение $\sin t=a$ имеет одно решение $t_1=\arcsin a$. На отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение.
Это решение есть число $t_2=\pi-\arcsin a$, т.к. $\sin t_2=\sin(\pi-t_1)=\sin t_1=a$.
Кроме того, поскольку $-\pi/2\le t_1\le\pi/2$,
имеем $-\pi/2\le -t_1\le\pi/2$
и $\pi-\pi/2\le\pi-t_1\le\pi+\pi/2$,
т.е. $\pi/2\le t_2\le 3\pi/2$, $t_2\in[\pi/2; 3\pi/2]$.
Итак, уравнение $\sin t=a$ на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ имеет два решения $t_1=\arcsin a$ и $t_2=\pi-\arcsin a$ (совпадающие при $a=1$). Учитывая, что период синуса равен 2π, получаем формулу для решения уравнения $\sin t=a$:
$$t=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Пример 43.
Решите уравнение: $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Решение:

по формуле $t=(-1)^k arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, ($k$ Є $\mathbf{Z}$).

Поскольку $arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi/4$ приходим к ответу $t=(-1)^k\ \pi/4+\pi k$, (k Є $\mathbf{Z}$).

Пример 44.
Решите уравнение: $sin\ t=0{,}3714$.
Решение:
по формуле $t=(-1)^k arcsin\ (0{,}3714)+\pi k$, ($k$ Є $\mathbf{Z}$).
Значение $arcsin\ (0{,}3714)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 0,3805.
Итак, приходим $t= (-1)^k 0{,}3805+\pi k$, (k Є $\mathbf{Z}$).

Пример 45.
Решите уравнение: $sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

функция синус нечетная, поэтому $sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=-sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле: $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, ($k$ Є $\mathbf{Z}$).

Т.к. $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, имеем

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,\ (k \in \mathbf{Z})$$

или

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{10}+(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,\ (k \in \mathbf{Z}).$$

Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

$$x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k,\ (k \in \mathbf{Z}).$$

Уравнение tg x=a
При любом a на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ существует одно число t , что $tgt=a$, – это $arctg\ a$. Поэтому уравнение $tg\ x=a$ имеет на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ длиной π единственный корень.
Функция тангенс имеет период π. Следовательно, остальные корни уравнения $tg\ t=a$ отличаются от найденного на πn, (n Є $\mathbf{Z}$), т.е.

$$t=arctg\ a+\pi n,\ (n \in \mathbf{Z}).$$

Пример 46.
Решите уравнение: $tg\ t=\sqrt{3}$.

Решение:
по формуле $t=arctg(\sqrt{3})+\pi n$, (n Є **Z**).

Поскольку $arctg(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$ приходим к ответу $t=\frac{\pi}{3}+\pi n$, (n Є **Z**).

Пример 47.
Решите уравнение: $tg\ t=5{,}177$.
Решение:
по формуле $t=arctg(5{,}177)+\pi n$, (n Є **Z**).
Значение $arctg(5{,}177)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,38.
Итак, приходим $t=1{,}38+\pi n$, (n Є **Z**).

Сводная таблица решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Решение
$\sin x=a$	$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k, k\in Z$
$\cos x=a$	$x=\pm\arccos a+2\pi k, k\in Z$
$tg x=a$	$x=arctg a+\pi k, k\in Z$
$ctg x=a$	$x=arcctg a+\pi k, k\in Z$

Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Частные случаи		
	a=-1	a=0	a=1
$\sin x=a$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$	$x=\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$
$\cos x=a$	$x=\pi+2\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$	$x=2\pi k, k\in Z$
$tg x=a$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$	$x=\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$
$ctg x=a$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

Задания для самостоятельного решения:
Решите уравнения:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$;	1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;	1) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; 2) $2\cos x=\sqrt{2}$;

2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; 3) $tg\,2x=\sqrt{3}$.	2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $tg\,2x=-\sqrt{3}$.	3) $tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{4}=\frac{4}{5}$; 3) $tg\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)=0$.	**5 вариант** 1) $\sin x=\frac{3}{5}$; 2) $\cos(1-x)=\frac{1}{2}$; 3) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=3$.	**6 вариант** 1) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$; 3) $ctg\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$.
7 вариант 1) $2\sin x=-\sqrt{2}$; 2) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $3tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$.	**8 вариант** 1) $2\sin 2x=-1$; 2) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$; 3) $ctg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$.	**9 вариант** 1) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$; 2) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $ctg\left(2x+45^0\right)=-1$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.
2. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.

Литература: [4, с. 181-187], [5, с. 69-74]

Практическое занятие № 7
Использование векторов при решении математических и прикладных задач

Цель работы:
студент должен:
знать:
- векторы и простейшие действия над ними;

уметь:
- применять правила действия над векторами при решении математических и прикладных задач.

Сведения из теории:

Рассмотрим задачи трёх типов, которые целесообразно решать с помощью векторов.

Первый тип: задачи, связанные с доказательством параллельности *прямых и отрезков, прямых и плоскости*

Пример 149.

Доказать что вектор, концами которого являются середины двух противолежащих сторон четырехугольника, равен половине векторной суммы двух других противолежащих сторон.

Решение:

пусть $ABCD$ – четырехугольник, M – середина AB, N– середина CD. Тогда необходимо доказать, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

Пусть O – произвольная точка плоскости, соединим ее с вершинами и серединами двух сторон четырехугольника, выполним рисунок (рис. 86):

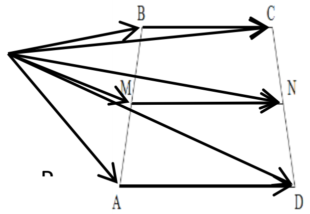


Рисунок 86.

По правилу деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

По правилу треугольника, имеем:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

Задача для самостоятельного решения №1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Второй тип: задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в заданном отношении

Пример 150.

На стороне AC треугольника ABC взята точка M так, что $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|$, а на продолжении стороны BC такая точка N что $\left|\overrightarrow{BN}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$. В каком отношении точка P пересечения AB и MN делит каждый из этих отрезков.
Решение:

выполним рисунок (рис. 87), соответствующий условию задачи:

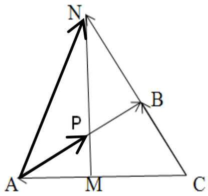


Рисунок 87.

Пусть и $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x, \ \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y$.

Выберем базисные векторы $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \ \overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базисным двумя различными способами:

$a)$ $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y$, тогда $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{y}{y+1}$, т.к. векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены, то

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1}\overrightarrow{AB} = \frac{y}{y+1}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{y}{y+1}(\vec{a} - \vec{b}).$$

Т.е.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1}\vec{a} - \frac{y}{y+1}\vec{b}.$$

б) $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x$, тогда , $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{AM} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{AN}$.

Но, по условию задачи $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, поэтому

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1}\left(-\frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{x}{x+1}(2\vec{a} - \vec{b}).$$

В полученном выражении раскроем скобки, упростим, тогда получим:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2x}{x+1}\vec{a} - \frac{1+4x}{4(x+1)}\vec{b}.$$

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{2x}{x+1}, \\ \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{1+4x}{4(x+1)} \end{cases}.$$

Решая систему любым известным способом (сложением, подстановкой), получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}, \\ y = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, точка P делит отрезок AB в отношении 2:3 и отрезок MN в отношении 1:4.

Задача для самостоятельного решения №2. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки соответственно H и M так, что отрезки MH и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков (воспользуйтесь предложенным рис. 88).

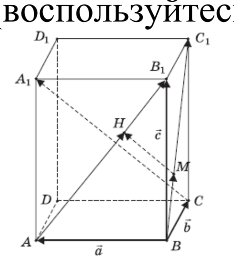


Рисунок 88.

Третий тип: задачи на доказательство принадлежности трех и более точек одной прямой

Пример 151.

Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC четырехугольника $ABCD$, причем AM:MD=BN:NC=3:4. Докажите, что середины отрезков AB, MN и CD лежат на одной прямой.

Решение:

выполним рисунок (рис. 89), соответствующий условию задачи

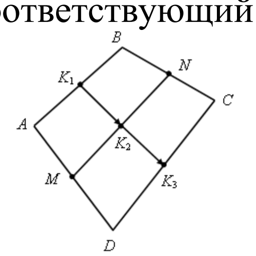


Рисунок 89.

Пусть K_1 – середина AB, K_2 – середина MN, K_3 – середина CD. Используя формулы деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}),$$

$$\overrightarrow{K_1K_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Из условия AM:MD=BN:NC=3:4 следует, что

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD},\ \ \overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}.$$

Т.о., векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1, K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

Задача для самостоятельного решения №3. В пространстве расположены отрезки AB и A_1B_1. Точка M есть середина отрезка AB, точка M_1 – середина A_1B_1. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, и MM_1 расположены на одной прямой.

Контрольные вопросы:

1. Приведите примеры задач, которые целесообразно решать с помощью векторов.

Литература: [10, с. 228, с. 237]

Практическое занятие № 8
Решение задач координатным методом

Цель работы:
студент должен:
знать:
- формулы для вычисления расстояния между двумя точками;
- формулы для вычисления координат середины отрезка;

уметь:
- использовать формулы расстояния между двумя точками и формулу для вычисления координат середины отрезка при решении задач координатным методом.

Сведения из теории:
Вычисление координат точки, равноудаленной от заданных точек рассмотрим на примере 137

Пример 137.

Найти координаты точки O_1, которая равноудалена от трех точек $A(7; -1)$ и $B(-2; 2)$ и $C(-1; -5)$.

Решение:

из формулировки условия задачи следует, что $O_1A=O_1B=O_1C$.

Пусть искомая точка O_1 имеет координаты $(a; b)$. По формуле:

$$d=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2},$$

найдем:

$$O_1A=\sqrt{(a-7)^2+(b+1)^2},$$

$$O_1B=\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2},$$

$$O_1C=\sqrt{(a+1)^2+(b+5)^2}.$$

Составим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{(a-7)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}\\ \sqrt{(a-7)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(b+5)^2}\end{cases}.$$

После возведения в квадрат левой и правой частей уравнений запишем:

$$\begin{cases}(a-7)^2+(b+1)^2=(a+2)^2+(b-2)^2\\ (a-7)^2+(b+1)^2=(a+1)^2+(b+5)^2\end{cases}.$$

Упростив, запишем:

$$\begin{cases}-3a+b+7=0\\ -2a-b+3=0\end{cases}.$$

Решив систему, получим: $a=2$; $b=-1$.

Точка $O_1(2; -1)$ равноудалена от трех заданных в условии точек, которые не лежат на одной прямой. Эта точка – есть центр окружности, проходящей через три заданные точки.

Вычисление абсциссы (ординаты) точки, которая лежит на оси абсцисс (ординат) и находится на заданном расстоянии от данной точки, рассмотрим на примере 138

Пример 138.

Расстояние от точки $B(-5; 6)$ до точки A, лежащей на оси Оx равно 10. Найти координаты точки A.

Решение:

из формулировки условия задачи следует, что ордината точки A равна нулю и $AB = 10$.

Обозначив абсциссу точки A через a, запишем $A(a; 0)$.

По формуле

$$d=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2},$$

находим:

$$AB=\sqrt{(a+5)^2+(0-6)^2}=\sqrt{(a+5)^2+36}.$$

Получаем уравнение

$$\sqrt{(a+5)^2+36}=10.$$

Упростив его, имеем

$$a^2+10a-39=0.$$

Корни этого уравнения a_1=-13; a_2=3.

Получаем две точки A_1(-13; 0) и A_2(3; 0) – рис. 79.

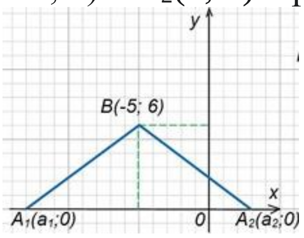


Рисунок 79.

Вычисление абсциссы (ординаты) точки, которая лежит на оси абсцисс (ординат) и находится на одинаковом расстоянии от двух заданных точек, рассмотрим на примере 139

Пример 139.

Найти на оси Оy точку, которая находится на одинаковом расстоянии от точек A(6; 12) и B(-8; 10).

Решение:

пусть координаты нужной по условию задачи точки, лежащей на оси Оy, будут O_1(0; b) (у точки, лежащей на оси Оy, абсцисса равна нулю). Из условия следует, что $O_1A=O_1B$.

По формуле

$$d=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2},$$

находим:

$$O_1A=\sqrt{(0-6)^2+(b-12)^2}=\sqrt{36+(b-12)^2},$$

$$O_1B=\sqrt{+8^2+(b-10)^2}=\sqrt{64+(b-10)^2}.$$

Имеем уравнение

$$\sqrt{36+(b-12)^2}=\sqrt{64+(b-10)^2}.$$

Выполняя элементарные преобразования при решении иррациональных уравнений, получим b=4.

Необходимая по условию задачи точка O_1(0; 4) – рис. 80.

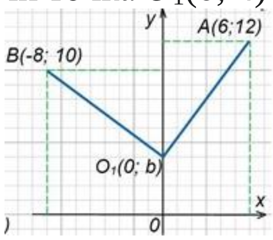


Рисунок 80.

Деление отрезка в данном отношении

Координаты x, y, z точки M, которая делит отрезок M_1M_2, ограниченный точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении λ, определяется по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Пример 140.

Даны концы отрезка AB: $A(-2;\ 5)$ и $B(4;\ 17)$. На этом отрезке расположена точка C, расстояние от которой до точки A в два раза больше расстояния от точки B. Вычислить координаты точки C.

Решение:

по условию задачи $AC=2BC$, тогда $\lambda=2$.

По формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

вычислим координаты точки C:

$$x = \frac{-2+2\cdot 4}{1+2} = \frac{-2+8}{3} = 2,$$

$$y = \frac{5+2\cdot 17}{1+2} = \frac{5+34}{3} 13.$$

Т.о., $C(2;\ 13)$.

Пример 141.

Доказать, что треугольник ABC: $A(-3;\ -3)$, $B(-1;\ 3)$, $C(11;\ -1)$ – прямоугольный.

Решение:

вычислим длины сторон треугольника по формуле:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$

$$BC = \sqrt{(11+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$

$$AC = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Т.к. $AB^2=40$, $BC^2=160$, $AC^2=200$, то $AB^2+BC^2=AC^2$.

Т.о., сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Из этого следует, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC является его гипотенузой.

Задания для самостоятельного решения:

1) Доказать, что треугольник с вершинами $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(0;\ -2;\ 2)$, $C(-3;\ 2;\ 1)$ равнобедренный.

2) На оси абсцисс найти точку, расстояние от которой до точки $A(-3; 4; 8)$ равно 12.
3) На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1; -3; 7)$ и $B(5; 7; -5)$.
4) Даны вершины $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$ треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.
5) Даны две вершины $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4; -1; 7)$. Определить две другие вершины этого параллелограмма.
6) Вычислить координаты концов отрезка, который разделен точками $C(2; 0; 2)$ и $D(5; -2; 0)$ на три равные части.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы для вычисления расстояния между двумя точками.
2. Запишите формулы для вычисления координат середины отрезка.
3. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.

Литература: [10, с. 189]

Практическое занятие №9
Правила вычисления производных

Цель работы:
студент должен:
знать:

- систему и определение производной;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила дифференцирования функций;

уметь:

- находить производную функции;
- находить дифференциал функции;
- дифференцировать элементарные функции.

Сведения из теории:
Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$c' = 0$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(kx+b)' = k$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила вычисления производных:

1. $(x \pm y)' = x' \pm y'$,
2. $(xy)' = x'y + xy'$,
3. $\left(\dfrac{x}{y}\right)' = \dfrac{x'y - xy'}{y^2}$.

Пример 68.

Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right)' = -2 \cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Пример 69.

Вычислите производную функции $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 2 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}(x-3)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'(x-3) + \sqrt{x}(x-3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} \cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите производную функции:

1 вариант	**2 вариант**
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; 2) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$;	1) $f(x) = 3x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 4x$; 2) $f(x) = (x-2)\sqrt{3x}$;

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$; 4) $f(x)=\dfrac{(x^2-1)(x+3)}{15}$.	3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}$; 4) $f(x)=(x^2+3)(x-4)$.
3 вариант 1) $f(x)=2x^2\sqrt{x}-4x+11+\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{x}$; 4) $f(x)=\ln x(x+3)$.	**4 вариант** 1) $f(x)=3x\sqrt[3]{x}-2x+5+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$; 2) $f(x)=\sqrt{x+1}(x^3-5)$; 3) $f(x)=\dfrac{9x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $f(x)=(x^2-1)\sqrt{x+3}$.
5 вариант 1) $f(x)=3x^3\sqrt{x}-2x+2+\dfrac{2}{x^2\sqrt{x}}$; 2) $f(x)=0{,}5(x+1)^2$; 3) $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$; 4) $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-5)}{12}$.	**6 вариант** 1) $f(x)=\dfrac{3x^3}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{x}}+5$; 2) $f(x)=(x^3+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x+2}$; 4) $f(x)=(x^2-1)(x+3)$.
7 вариант 1) $f(x)=\dfrac{-2x^3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{3x^2}{\sqrt{x}}+5x-1$; 2) $f(x)=(x^3-2)\sqrt{x+1}$; 3) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{3}x^3-2}{4x}$; 4) $f(x)=\ln x(e^x-1)$.	**8 вариант** 1) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{4}x^4-0{,}5x^2-5$; 2) $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-x)$; 3) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.
9 вариант 1) $f(x)=2x^3-4x^2-5x+3$; 2) $f(x)=(x-1)\sqrt{x+1}$;	3) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$; 4) $f(x)=(x^3-1)(x^2+1)$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите значения производных некоторых табличных функций.
2. Сформулируйте правила вычисления производных.

Литература: [8, §29-30, с. 286-297]

Практическое занятие №10
Вычисление производных сложной функции

Цель работы:

студент должен:

знать:

- системy и определение производной, второй производной и производных высших порядков;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила вычисления производной сложной функции;

уметь:

- находить производную сложной функции;
- находить вторую производную и производную высших порядков.

Сведения из теории:

Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = f(x)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле:

$$z'(x_0) = (f(g(x_0))' = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 70.

Вычислите производную функции $y = (x^2 + 3x + 10)^2$.

Решение:

представим заданную функцию как композицию квадратичной функции и степенной

$$y = (x^2 + 3x + 10)^2;$$

$$g(x) = x^2 + 3x + 10;$$

$$f(x) = (g(x))^2;$$

$$f'(x) = ((g(x))^2)' = 2g(x) \cdot (g(x))';$$

$$y' = 2(x^2 + 3x + 10) \cdot (x^2 + 3x + 10)' = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3).$$

Производные высших порядков

Вторая производная это производная от первой производной, т.е. $y'' = (y')'$, и т.д.

Производные высших порядков обозначаются римскими цифрами.

Пример 71.

Найти четвертую производную $y = x^6 + 4x + 12$.

Решение:

вычисляем последовательно производные:

$$y' = 6x^5 + 4;$$
$$y'' = 30x^4;$$
$$y''' = 120x^3;$$
$$y^{IV} = 360x^2.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите значение «сложной» производной в указанной точке:

1 вариант 1) $f(x)=\sin^2 x;\;\; f'(\pi/4);$ 2) $f(x)=\ln\cos x;\;\; f'(-\pi/3);$ 3) $f(x)=\sin 2x-\cos^2 x;\;\; f'(0);$ 4) $f(x)=\ln tgx;\;\; f'(\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{\sin x};\;\; f'(0).$	**2 вариант** 1) $f(x)=\cos^2 x;\;\; f'(-\pi/4);$ 2) $f(x)=\ln\sin x;\;\; f'(\pi/6);$ 3) $f(x)=\sin^2 x+\cos 2x;\;\; f'(0);$ 4) $f(x)=\ln ctgx;\;\; f'(-\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{\cos 2x};\, f'(\pi/4).$
3 вариант 1) $f(x)=\ln\sin^2 x;\;\; f'(\pi/4);$ 2) $f(x)=\cos^2 x^2;\;\; f'(\sqrt{\pi}/2);$ 3) $f(x)=2\sin^2 x\cos x;\;\; f'(\pi/2);$ 4) $f(x)=tg^2 3x;\;\; f'(0);$ 5) $f(x)=e^{\sin 2x}-3e^{\cos 2x};\, f'(0).$	**4 вариант** 1) $f(x)=-2\sin^2 x;\;\; f'(-\pi/4);$ 2) $f(x)=\ln\cos x;\;\; f'(\pi/3);$ 3) $f(x)=2\sin 2x+3\cos 3x;\;\; f'(0);$ 4) $f(x)=\ln tgx;\;\; f'(\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{-2\sin x};\;\; f'(0).$
5 вариант 1) $f(x)=\ln\cos^2 2x;\;\; f'(\pi/8);$ 2) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x;\, f'(\pi/4);$ 3) $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x};\;\; f'(\pi/8);$ 4) $f(x)=\ln tg2x;\;\; f'(\pi/8);$ 5) $f(x)=e^{\cos 2x}-2e^{\sin 2x};\, f'(\pi/4).$	**6 вариант** 1) $f(x)=\ln tg^2 2x;\;\; f'(\pi/24);$ 2) $f(x)=\cos^3 x;\, f'(\pi/4);$ 3) $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x;\;\; f'(\pi/4);$ 4) $f(x)=e^{-\sin x}-e^{-\cos x};\, f'(\pi/2);$ 5) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x};\, f'(\pi/4).$
7 вариант 1) $f(x)=\ln\cos^2 4x;\;\; f'(\pi/16);$ 2) $f(x)=4\cos^2 x;\, f'(\pi/4);$ 3) $f(x)=4\sin^5 2x;\;\; f'(\pi/8);$ 4) $f(x)=\ln tg3x;\;\; f'(\pi/12);$ 5) $f(x)=e^{\sin x}+e^{\cos x};\, f'(\pi/2).$	**8 вариант** 1) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x};\;\; f'(\pi/8);$ 2) $f(x)=\cos^4 3x;\;\; f'(\pi/6);$ 3) $f(x)=\ln\sqrt{tg3x};\;\; f'(\pi/12);$ 4) $f(x)=\arcsin 4x+e^{3x};\;\; f'(0);$ 5) $f(x)=5\arccos\sqrt{x};\, f'(1/2).$
9 вариант 1) $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x};\;\; f'(-\pi/8);$ 3) $f(x)=\ln\sqrt{ctg3x};\;\; f'(-\pi/12);$ 5) $f(x)=5arccos\sqrt{1-x};\, f'(1/2).$	 2) $f(x)=\sin^4 6x;\, f'(\pi/3);$ 4) $f(x)=arctg\sqrt{x};\;\; f'(1/4);$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правила вычисления производных сложной функции.

2. Что называется второй производной данной функции?

Литература: [4, с. 236-237], [8, §31, с. 297-301]

Практическое занятие №11
Нахождение наименьшего, наибольшего значения функции на отрезке

Цель работы:
студент должен:
знать:

- определение точек максимума (минимума) функции;
- зависимость поведения функции от знака первой производной;

уметь:

- применять первую производную для нахождения промежутков монотонности функции;
- находить наименьшее, наибольшее значение функции на отрезке.

Сведения из теории:

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

1) найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
2) найти значения функции на концах промежутка;
3) сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

Пример 72.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-2; 0].

Решение:

вычислим критические точки функции, принадлежащие заданному промежутку, с помощью первой производной:

$$y' = 3 + 4x + x^2;$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0;$$

$$D = 16 - 12 = 4;$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2};$$

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = -3.$$

Т.к. -3$\notin$[-2; 0], x=-1 – критическая точка.

$$y(-1) = 3(-1) + 2(-1)^2 + \frac{1}{3}(-1)^3 = -3 + 2 - \frac{1}{3} = -1\frac{1}{3}, \ \underline{y(-1) = -1\frac{1}{3}}.$$

Вычислим значения функции на концах промежутка:

$$y(-2) = 3(-2) + 2(-2)^2 + \frac{1}{3}(-2)^3 = -6 + 8 - \frac{8}{3} = 2 - 2\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}, \ \underline{y(-2) = -\frac{2}{3}}.$$

$$\underline{y(0)=0}.$$

Сравним полученные значения: наименьшее значение функции равно $-1\frac{1}{3}$ и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение равно 0 и достигается на правом конце промежутка.

Задания для самостоятельного решения:

Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках:

1) $y = -6x + x^2 + 13$ на промежутке [0; 6];
2) $y = 8 - 0{,}5x^2$ на промежутке [-2; 2];
3) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [1; 3];
4) $y = 6x^2 - x^3$ на промежутке [-1; 6];
5) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на промежутке [-4; 4];
6) $y = -24x + 9x^2 - x^3 + 10$ на промежутке [0; 3];
7) $y = x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-4; -1];
8) $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-3; 1];
9) $y = -3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-5; 0].

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правила вычисления наименьшего и наибольшего значения функции на промежутке.

Литература: [4, с. 111]

Практическое занятие №12
Построение графиков функций

Цель работы:

студент должен:

знать:

- общую схему построения графиков функций;

уметь:

- исследовать функцию с помощью первой, второй производной;
- строить графики функций.

Сведения из теории:

Общая схема построения графиков функций:

1) найти область определения функции;
2) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
3) найти промежутки монотонности функции и экстремумы функции;
4) найти промежутки выпуклости и точки перегиба;
5) построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример 73.

Исследовать функцию $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых x. Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y=(x+1)\cdot(x–2)^2$ пересекает ось Оx при y=0, т. е.

$$(x+1)\cdot(x–2)^2=0;$$
$$x+1=0 \text{ или } (x–2)^2=0;$$
$$x=-1 \text{ или } x=2.$$

График функции $y=(x+1)\cdot(x–2)^2$ пересекает ось Оy при x=0, т. е.

$$y=(0+1)\cdot(0–2)^2=1\cdot4=4.$$

Т.о. мы получили три точки: (–1; 0), (2; 0), (0; 4).

3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной:

$$y'=((x+1)\cdot(x–2)^2)'=3x\cdot(x–2).$$

Из уравнения y'=0 найдем критические точки:

$$3x\cdot(x–2)=0;$$
$$x_1=0,\ x_2=2.$$

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0; 2)	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$
	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$, убывает на интервале (0; 2), имеет максимум при x=0 и минимум при x=2: $y_{max}=y(0)=4$; $y_{min}=y(2)=0$.

4) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной:

$$y''=(3x\cdot(x–2))'=6\cdot(x-1).$$

Кривая выпукла там, где $y''< 0$, т. е.

$$6\cdot(x-1) < 0,$$
$$x < 1.$$

Кривая вогнута там, где $y'' > 0$, т. е. $x > 1$.

На интервале $(-\infty, 1)$ кривая выпукла; на интервале $(1, +\infty)$ – вогнута.

Точку перегиба найдем из уравнения $y''=0$. Т. о., $x=1$ – абсцисса точки перегиба, т.к. эта точка разделяет интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Ордината точки перегиба: $y(1)=2$.

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+
y		2	
	выпукла	перегиб	вогнута

5) По полученным точкам строим график:

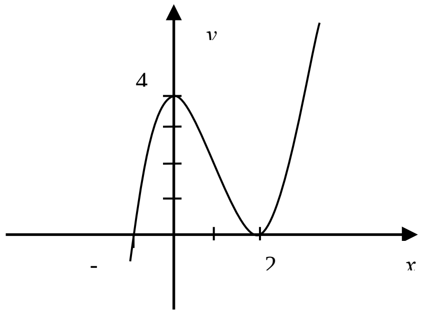


Рисунок 23. График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$

Задания для самостоятельного решения:

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1 вариант $y=-x^4+8x^2+9$.	**2 вариант** $y=x^3-3x$.	**3 вариант** $y=x^3+6x^2+9x+8$.
4 вариант $y=x^4-5x^2+4$.	**5 вариант** $y=x^3-6x^2+9x-3$.	**6 вариант** $y=x^3-12x+4$.
7 вариант $y=-x^3+x$.	**8 вариант** $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$.	**9 вариант** $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется областью определения и областью значений функции?
2. Приведите примеры применения первой производной к исследованию функции.
3. Приведите примеры применения второй производной к исследованию функции.
4. Расскажите общую схему исследования и построения графика функции.

Литература: [1, §31, с. 297-301], [1, §38-39, с. 342-353, с. 360]

Практическое занятие №13
Вычисление определенных интегралов различными способами

Цель работы:
студент должен:
знать:

- формулу Ньютона-Лейбница;
- суть методов вычисления определенных интегралов;

уметь:

- вычислять определенные интегралы методами: замены переменной, по частям.

Сведения из теории:
Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример 78.

Вычислить определенный интеграл $\int_0^{10}(3t^2+2t+1)dt$.

Решение:
по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_2^{10}(3t^2+2t+1)dt = \left(\frac{3t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}+t\right)\Bigg|_2^{10} = \left(t^3+t^2+t\right)\Big|_2^{10} =$$
$$= \left(10^3+10^2+10\right) - \left(2^3+2^2+2\right) = 1110 - 14 = 1096.$$

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной
При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ преобразуется с помощью подстановки $u=g(x)$ в определенный интеграл относительно новой переменной u. При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования α и β , которые вычисляются по формулам: $\alpha=g(a)$ и $\beta=g(b)$.

Пример 79.

Вычислить определенный интеграл $\int_{2}^{3}(2x-1)^3dx$.

Решение:
преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду, далее воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница:

$$\int_{2}^{3}(2x-1)^3dx=\left|\begin{array}{ll} u=2x-1 & \\ du=(2x-1)'dx & u_1=2\cdot 3-1=5 \\ du=2dx & u_2=2\cdot 2-1=3 \\ dx=\dfrac{1}{2}du & \end{array}\right|=\int_{3}^{5}u^3\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{u^4}{4}\right|_3^5=$$

$$=\frac{5^4}{8}-\frac{3^4}{8}=\frac{625-81}{8}=\frac{544}{8}=68.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле
Если функции $u(x)$ и $v(x)$ и их производные непрерывны в промежутке $[a;b]$, то формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид:

$$\int_{a}^{b}udv=uv\Big|_a^b-\int_{a}^{b}vdu.$$

Пример 80.

Вычислить определенный интеграл $\int_{e}^{4}x\ln xdx$.

Решение:
преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду, далее воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница:

$$\int_{e}^{4}x\ln xdx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x & dv=xdx \\ du=(\ln x)'dx & \int dv=\int xdx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_e^4-\int_{e}^{4}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{16}{2}\ln 4-\frac{e^2}{2}\ln e-\int_{e}^{4}\frac{x}{2}\cdot\frac{dx}{1}=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\left(\frac{x^2}{4}\right)_e^4=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\left(\frac{4^2}{4}-\frac{e^2}{4}\right)=$$

$$=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-4+\frac{e^2}{4}=8\ln 4-\frac{e^2}{4}-4.$$

Задания для самостоятельного решения:
Вычислите следующие интегралы:

1 вариант 1) Методом замены переменной: $\int_{-1}^{2}(x^2+3)^5 xdx$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{0}^{\pi/2} x\cos xdx$.	**2 вариант** 1) Методом замены переменной: $\int_{2}^{3}4(x^4-1)^2 x^3 dx$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{\pi/3}^{\pi/2}(1-x)\sin xdx$.	**3 вариант** 1) Методом замены переменной: $\int_{-1}^{0}\frac{6x^2dx}{(1-2x^3)^4}$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{1}^{e}\frac{\ln xdx}{x^3}$.
4 вариант 1) Методом замены переменной: $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(5x+1)^3}$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{1}^{e}\ln^2 xdx$.	**5 вариант** 1) Методом замены переменной: $\int_{3}^{4}\frac{x}{x^2-1}dx$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{e}^{4}\ln xdx$.	**6 вариант** 1) Методом замены переменной: $\int_{1}^{3}(x^3+1)x^2dx$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$.
7 вариант 1) Методом замены переменной: $\int_{-2}^{0}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{0}^{1}\arccos xdx$.	**8 вариант** 1) Методом замены переменной: $\int_{0}^{3}x^2\sqrt{x^3+5}dx$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{0}^{1}\arcsin xdx$.	**9 вариант** 1) Методом замены переменной: $\int_{1}^{3}x\sqrt{10-x^2}dx$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{0}^{\pi/2}x^2\sin xdx$.

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется первообразной для функции *f(x),* при $x\in(a;b)$?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные формулы интегрирования.
4. Сформулируйте суть метода непосредственного интегрирования.
5. Сформулируйте суть метода замены переменной.
6. Сформулируйте суть метода интегрирования по частям.
7. Приведите примеры приложения определенных интегралов.

Литература: [4, с. 310, с. 316], [5, с. 219-222].

Практическое занятие № 14

Вершины, ребра, грани многогранника

Цель работы:
студент должен:
знать:
- свойство, связывающее число вершин, ребер и граней многогранника;

уметь:
- устанавливать связь между числом плоских углов *П* многогранника и числом его ребер *Р*.

Сведения из теории:
Для выпуклых многогранников имеет место свойство, связывающее число его вершин, ребер и граней, доказанное в 1752 году Леонардом Эйлером, и получившее название теоремы Эйлера.
Прежде чем его сформулировать рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой *В* – число вершин, *Р* – ребер и *Г* – граней данного многогранника:

Название многогранника	*В*	*Р*	*Г*
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	n+1	2n	+1
n-угольная призма	2n	3n	n+2
n-угольная усеченная пирамида	2n	3n	n+2

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство *В*-*Р*+*Г*=2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для этих многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника.
Заметим, что многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Число вершин, ребер и граней при этом не изменится.
Для полученного разбиения многоугольника на более мелкие многоугольники имеет место равенство:

$$В\text{-}Р+Г=1,$$

где *В* – общее число вершин, *Р* – общее число ребер и *Г* – число многоугольников, входящих в разбиение. Ясно, что *Г*=*Г*–1, где *Г* – число граней данного многогранника.

В любом выпуклом многограннике найдется грань с числом ребер меньшим или равным пяти
Для любого многогранника имеет место неравенство $3B \le 2P$.

Задания для самостоятельного решения:
1) Может ли число вершин многогранника равняться числу его граней?
2) Установите связь между числом плоских углов *П* многогранника и числом его ребер *Р*.
3) Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин *В* и граней *Г*, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Приведите примеры таких многогранников.
4) Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин *В* и граней *Г*, если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.
5) В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин *В* и граней *Г*, если число ребер равно 12? Нарисуйте эти многогранники.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу, связывающую число вершин, ребер и граней многогранника.

Литература: [10, с. 175]

Практическое занятие № 15
Параллелепипед. Куб

Цель работы:
студент должен:
знать:
- определение параллелепипеда, куба;
- свойства прямоугольного параллелепипеда;
- формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба;

уметь:
- строить параллелепипед, куб;
- вычислять объем прямоугольного параллелепипеда, куба.

Сведения из теории:
Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы. Отрезки, соединяющие вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной и той же грани, называются *диагоналями параллелепипеда*.
Свойства параллелепипеда
1) Середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии.

2) Противолежащие грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.
3) Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

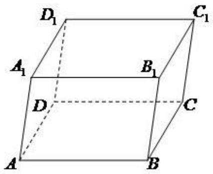


Рисунок 46. Параллелепипед

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания параллелепипеда, называется *прямым параллелепипедом* ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед).

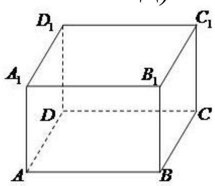


Рисунок 47. Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.

Свойства прямоугольного параллелепипеда
1) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

$$d^2=a^2+b^2+c^2.$$

2) Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.
3) Для куба формула упрощается: $4d^2=12a^2$.

Пример 114.
Найти длину стороны куба, если его диагональ равна 5 см.
Решение:
из формулы для диагонали куба выразим его сторону:

$$a^2=\frac{4d^2}{12}.$$

Тогда,

$$a=\sqrt{\frac{4d^2}{12}}=\frac{d}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Т. к. параллелепипед есть частный случай призмы, то площадь поверхности и объем параллелепипеда вычисляются по формулам для площади поверхности и объема призмы. Кроме того, объем прямоугольного параллелепипед можно вычислять по формуле:

$$V=abc,$$

где a, b, c – три измерения прямоугольного параллелепипеда.

Куб

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется кубом.
Все грани куба – равные квадраты.
Объем куба вычисляется по формуле:

$$V=a^3,$$

где a – измерение куба.

Как найти сумму длин всех рёбер параллелепипеда

Для удобства введем обозначения: A и B стороны основания параллелепипеда; C – его боковая грань.
Т. о., в основании параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами A и B. Параллелограмм – это четырехугольник, противоположные стороны которого равны и параллельны. Из этого определения следует, что против стороны A лежит равная ей сторона A. Поскольку противолежащие грани параллелепипеда равны (вытекает из определения), то верхняя его грань тоже имеет 2 стороны равные A. Таким образом, сумма всех четырех этих сторон равна $4A$.
То же, можно сказать, и о стороне B. Противоположная ей сторона в основании параллелепипеда равна B. Верхняя (противолежащая) грань параллелепипеда тоже имеет 2 стороны, равные B. Сумма всех четырех этих сторон равна $4B$.
Боковые грани параллелепипеда тоже являются параллелограммами (вытекает из свойств параллелепипеда). Ребро C одновременно является стороной двух соседних граней параллелепипеда. Поскольку противоположные грани параллелепипеда попарно равны, то все его боковые ребра равны между собой и равны C. Сумма боковых ребер – $4C$.
Таким образом, сумма всех ребер параллелепипеда: $4A+4B+4C$ или $4(A+B+C)$.
Частный случай прямого параллелепипеда – куб. Сумма всех его ребер равна $12A$.

Пример 115.

Найдите ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда, если ширина b больше его длины a на 1 см, высота c в 2 раза больше длины a, а диагональ d в 3 раза больше длины a.
Решение:
запишем основную формулу квадрата диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$d^2=a^2+b^2+c^2.$$

Выразим все измерения через заданную длину a: $b=a+1$; $c=2a$; $d=3a$.

Подставим в формулу:

$$9a^2 = a^2 + (a+1)^2 + 4a^2.$$

Решив квадратное уравнение, найдем длины всех ребер:

$$3a^2 - 2a - 1 = 0.$$

$$a=1;\ b=2;\ c=2.$$

Пример 116.

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

Решение:

обозначим известные ребра за a и b, а неизвестное за c. Площадь поверхности параллелепипеда выражается как

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Выразим c:

$$c = \frac{\frac{S}{2} - ab}{a+b}.$$

Подставляя заданные значения, имеем:

$$c = \frac{\frac{94}{2} - 12}{7} = 5.$$

Ответ: 5.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Надо покрасить пол в комнате. Расход краски на 1 *м*^{2} – 120 *г*, комната имеет размеры 5 *м* и 4 *м*. Сколько потребуется краски?

2) Надо оклеить комнату с одним окном и дверью обоями от пола до потолка. Длина комнаты 5 *м*, ширина – 4 *м*, высота – 3 *м*. Площадь окна 3 *м*^{2}, площадь двери 2 *м*^{2}. Обои продаются целыми рулонами, 1 рулон на 10 *м*^{2}. Сколько потребуется рулонов обоев?

3) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.

4) Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение параллелепипеда, куба, выполните соответствующие чертежи.
2. Перечислите свойства прямоугольного параллелепипеда.
3. Запишите формулы для вычисления объема параллелепипеда, куба.

Литература: [10, с. 143]

Практическое занятие № 16
Сечения куба, призмы, пирамиды

Цель работы:
студент должен:
знать:
- метод «следов»;
- правила построения сечений многогранников;

уметь:
- строить сечения куба, призмы, пирамиды.

Сведения из теории:
Сечения куба плоскостью
Если плоскость пересекает три ребра куба, выходящих из одной вершины, то в сечении получается треугольник (рис. 48 слева). При этом если отсекаемые плоскостью отрезки ребер равны, то в сечении получается равносторонний треугольник, если равны два отрезка из трех, то получается равнобедренный треугольник, наконец, если все три отрезка различны, то в сечении получается разносторонний треугольник.

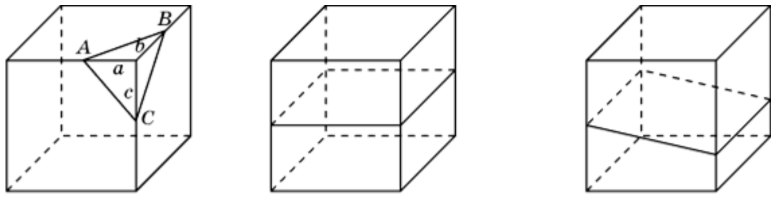


Рисунок 48. Сечения куба плоскостью

В сечении куба плоскостью не могут получаться прямоугольный или тупоугольный треугольники.
Выясним, какие четырехугольники могут получаться в сечении куба плоскостью.
Ясно, что если плоскость параллельна одной из граней куба, то в сечении получается квадрат (рис. 48 посередине). Если плоскость параллельна одному из ребер куба, то в сечении получается прямоугольник (рис. 48 справа). Если плоскость пересекает четыре параллельных ребра куба, то в сечении получается параллелограмм (рис. 49 слева).

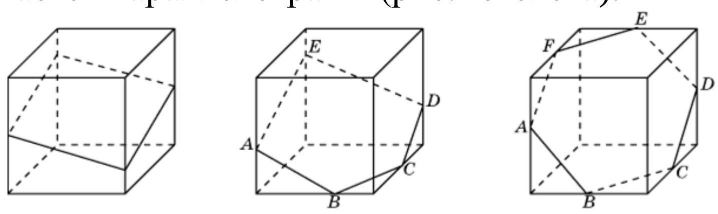


Рисунок 49. Сечения куба плоскостью

На рис. 49 посередине показано сечение куба плоскостью в форме пятиугольника *ABCDE*. Прямые *AB* и *DE*, *CD* и *AE* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
На рис. 49 справа показано сечение куба плоскостью в форме шестиугольника *ABCDEF*. Прямые *AB* и *DE*, *BC* и *EF*, *CD* и *AF* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
Поскольку у куба имеется только шесть граней, то в сечении куба плоскостью не может получиться многоугольник с числом сторон, большим шести.

Построение сечений многогранников
Для построения сечений используют метод «следов», заключающийся в нахождении точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость.

Пример 117.
Пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Требуется найти точку пересечения прямой AB с плоскостью π.
Решение:
через точки A', B' проведем прямую k'. Тогда пересечение прямой k с прямой k' и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (см. рис. 50).

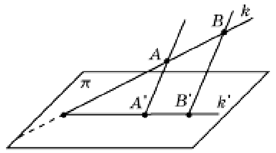


Рисунок 50.

Пример 118.
Даны точки A, B, C и их параллельные проекции A', B', C' на плоскость π. Требуется построить линию пересечения плоскости ABC и плоскости π.
Решение:
используя решение предыдущей задачи, построим точки X и Y пересечения прямых AB и AC с плоскостью π. Прямая XY будет искомой линией пересечения плоскости ABC и плоскости π (см. рис. 51).

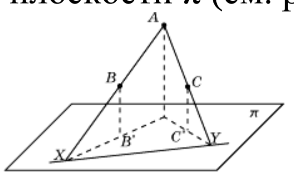


Рисунок 51.

Пример 119.
Через данную точку C (C') провести прямую, параллельную данной прямой AB ($A'B'$), и найти ее точку пересечения с плоскостью π.
Решение:

через точку *C* проводим прямую, параллельную *AB*. Через точку *C’* проводим прямую, параллельную *A’B’*. Точка *X* пересечения этих прямых и будет искомой (см. рис. 52).

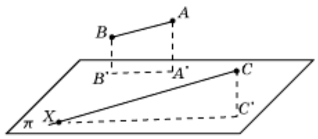


Рисунок 52.

Используя метод, рассмотренный в примере 119, решим задачи на построение сечений куба, пирамиды и призмы

Пример 120.

Построить сечение куба плоскостью проходящей через три точки *A*, *B*, *C*, принадлежащие попарно скрещивающимся ребрам этого куба (см. рис. 53).

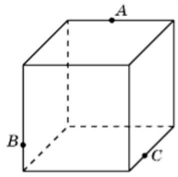


Рисунок 53.

Решение:

найдем пересечение прямой *AB*, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции*A’, B’* точек *A, B* на основание куба в направлении бокового ребра куба (см. рис. 54).

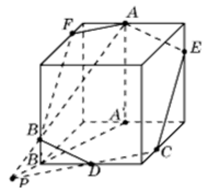


Рисунок 54.

Пересечение прямых *AB* и *A’B’* будет искомой точкой *P*. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой *CP*. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку *D* сечения куба. Соединим точки *C* и *D*, *B* и *D* отрезками. Через точку *A* проведем прямую, параллельную *BD*, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим *E*. Соединим точки *E* и *C* отрезком. Через точку *A* проведем прямую, параллельную *CD*, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим *F*. Соединим точки *A* и *F*, *B* и *F* отрезками. Многоугольник *AECDBF* и будет искомым изображением сечения куба плоскостью.

Пример 121.

Построить сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки A, B, C, принадлежащие ее ребрам (см. рис. 55).

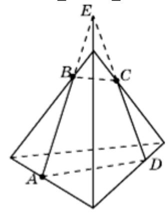


Рисунок 55.

Решение**:**

проведем прямую AB и ее точку пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим через E. Проведем прямую EC и ее точку пересечения с ребром основания пирамиды обозначим через D. Соединим отрезками точки B и C, A и D. Четырехугольник $ABCD$ будет искомым сечением пирамиды.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и середину ребра CC_1?

2) Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и DD_1?

3) Через середину ребра куба, перпендикулярно скрещивающейся с этим ребром диагонали, проведено сечение. Определите его вид.

4) Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.

5) Через вершины A, C, D_1 куба $A\ldots D_1$ проведено сечение. В каком отношении оно делит диагональ DB_1, и какой образует угол с этой диагональю?

6) Каким является сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и CD?

7) Какой фигурой является сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки M, N – середины соответственно ребер AD, CD?

8) Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку H, принадлежащую ребру CC_1.

9) Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 56.

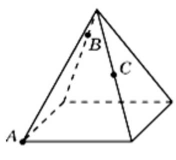


Рисунок 56.

10) Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 57.

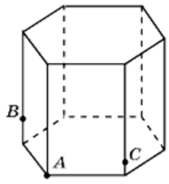


Рисунок 57.

Контрольные вопросы:

1. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) трапеция; б) равнобедренная трапеция; в) неравнобедренная трапеция; г) прямоугольная трапеция; д) тупоугольная трапеция?
2. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?
3. Какие могут быть сечения правильного тетраэдра плоскостью?

Литература: [10, с. 144-151]

Практическое занятие №17
Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр)

Цель работы:
студент должен:
знать:
- определение правильных многогранников;
- виды, элементы, свойства правильных многогранников;

уметь:
- строить правильные многогранники.

Сведения из теории:
Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны. Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. слева). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также *правильным тетраэдром*, или просто *тетраэдром*, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

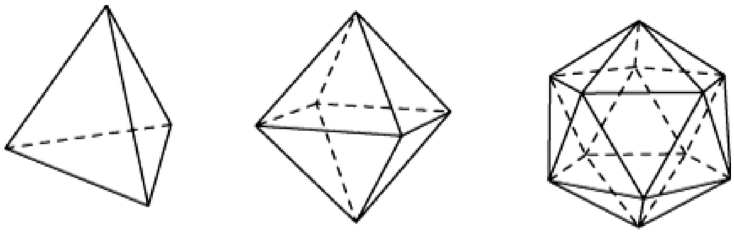


Рисунок 58. Правильные многогранники

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке посередине. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется *октаэдром*.
Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется *икосаэдром*.
Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника, не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.
Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. слева), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также *гексаэдром*.

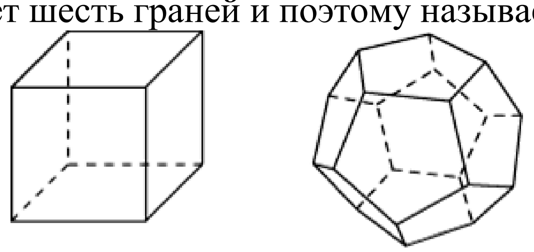


Рисунок 59. Правильные многогранники

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется *додекаэдром.*

Задания для самостоятельного решения:
1) Чему равны плоские углы додекаэдра?
2) Представьте многогранник – бипирамиду, сложенную из двух правильных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли он правильным многогранником?
3) Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов – рис. 60) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин B и ребер P?

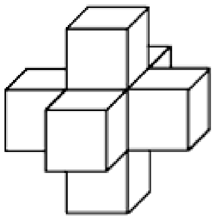


Рисунок 60.

4) Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами.
5) Сколько красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников, так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение правильного многогранника.
2. Сколько вершин, ребер и граней имеют: а) тетраэдр; б) октаэдр; в) куб; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

Литература: [10, с. 176]

Практическое занятие №18
Шар и сфера, их сечения

Цель работы:
студент должен:
знать:
- определение шара, сферы, их элементов;

уметь:
- строить сечения шара.

Сведения из теории:

Шаром принято называть тело, ограниченное сферой, т.е. шар и сфера – это разные геометрические тела.
Сфера – это фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки на данном расстоянии.

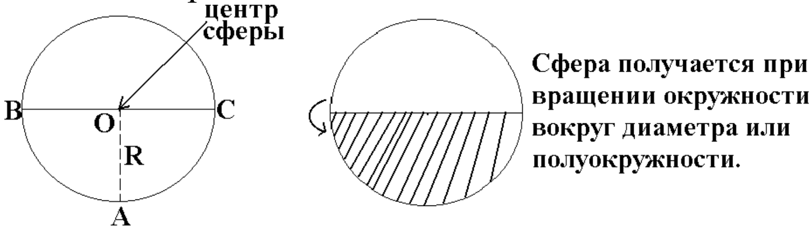


Рисунок 65. Сфера

Поверхность шара называют сферой. Если рассечь сферу плоскостью, получим в сечении окружность. Такие окружности имеют разные радиусы: чем дальше плоскость от центра сферы, тем меньше радиус сечения. Самые большие окружности получаются при сечении сферы плоскостями, проходящими через её центр. Такими большими окружностями на земной поверхности являются экватор и меридианы. А параллели – это сечения земной поверхности плоскостями, которые параллельны экваториальной плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется *центром сферы и обычно обозначается O.*

Расстояние от точек сферы до её центра называется *радиусом сферы и обычно обозначается R. Радиусом* также называется любой отрезок, соединяющий точку сферы с её центром. *Сфера* – это граница шара. Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более чем на данное расстояние. Другими словами, *шар* – это объединение сферы и всех ее внутренних точек.
Всякое *сечение шара* плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Основные геометрические формулы
Площадь сферы:

$$S=4\pi r^2=\pi d^2.$$

Объем шара, ограниченного сферой:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

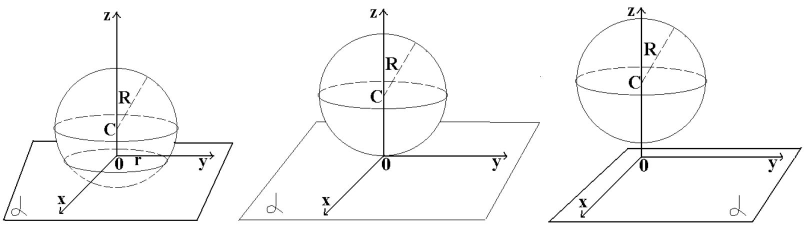


Рисунок 66. Взаимное расположение сферы и плоскости

Касательная плоскость к сфере
Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.
Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

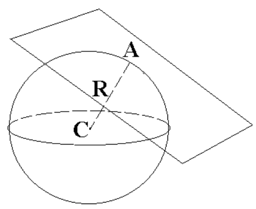


Рисунок 67. Касательная плоскость к сфере

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Сечение шара

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

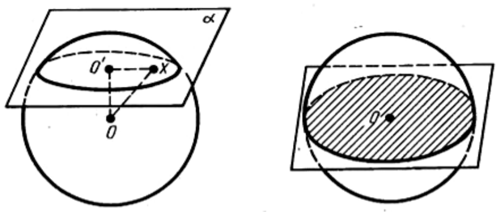


Рисунок 68. Сечение шара

Пример 122.

Два сечения шара радиуса 10 см параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 см и 8 см. Найти расстояние между секущими плоскостями.

Решение:

находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора:

$$d_1 = \sqrt{100-36} = 8 \text{ см}$$

или

$$d_2 = \sqrt{100-64} = 6 \text{ см}.$$

В зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче:

d=14 см.

Пример 123.

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга (рис. 69)?

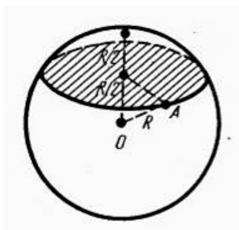


Рисунок 69.

Решение:

отношение площади круга к площади полученного сечения равно:

$$\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2}=\frac{3}{4}.$$

Задания для самостоятельного решения:
Решите задачи:
1) Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Вычислите площадь получившегося сечения.
2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?
3) Радиус шара равен 63см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.
4) Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60^0 к нему. Найти площадь сечения.
5) На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара равен 13см. Радиус шара равен 13см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

Контрольные вопросы:
1. Дайте определение шара, сферы.
2. Запишите формулы площади сферы, объема шара.
3. Приведите примеры взаимного расположения сферы и плоскости.

Литература: [10, с. 282, 285]

Практическое занятие №19
Вычисление объемов тел и поверхностей вращения

Цель работы:
студент должен:
знать:
- формулы объемов тел и поверхностей вращения;

уметь:
- вычислять объемы тел и поверхностей вращения.

Сведения из теории:
Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V=abc,$$

где a, b, c – стороны параллелепипеда.

Объем куба

$$V=a^3,$$

где a – длина грани куба.

Объем призмы

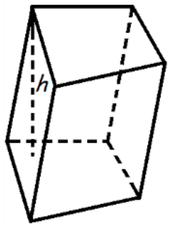


Рисунок 70. Призма

Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту:

$$V=S_o h,$$

где S_o – площадь основания призмы, h – высота призмы.

Объем параллелепипеда

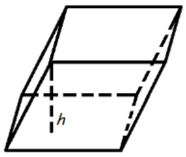


Рисунок 71. Параллелепипед

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$$V=S_o \cdot h,$$

где S_o – площадь основания, h – длина высоты.

Объем прямоугольного параллелепипеда

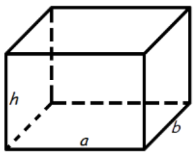


Рисунок 72. Прямоугольный параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты:

$$V=a \cdot b \cdot h,$$

где a – длина, b – ширина, h – высота.

Объем пирамиды

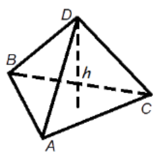


Рисунок 73. Пирамида

Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} S_o h,$$

где $S_о$ – площадь основания пирамиды, h – длина высоты пирамиды.

Объем правильного тетраэдра

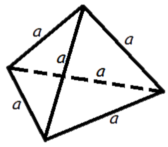


Рисунок 74. Тетраэдр

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

где a – длина ребра правильного тетраэдра.

Объем цилиндра

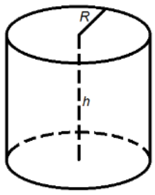


Рисунок 75. Цилиндр

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = \pi R^2 h$$

или

$$V = S_о h,$$

где $S_о$ – площадь основания цилиндра, R – радиус цилиндра, h – высота цилиндра, $\pi = 3{,}141592$.

Объем конуса

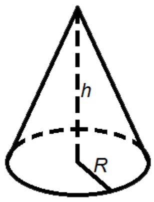


Рисунок 76. Конус

Объем конуса равен трети от произведения площади его основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

или

$$V = \frac{1}{3} S_o h,$$

где $S_о$ – площадь основания конуса, R – радиус основания конуса, h – высота конуса, π=3,141592.

Объем шара

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

где R – радиус шара, π=3,141592.

Пример 124.

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

Решение:

обозначим ребро куба за x и составим уравнение:

$$(x+2)^3=x^3+98,$$

$$x^3+6x^2+12x+8=x^3+98,$$

$$6x^2+12x-90=0,$$

$$x^2+2x-15=0,$$

$$x_1=-5,\ x_2=3.$$

$x_1=-5$ – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3.

Пример 125.

Прямоугольный лист жести, имеющий 1,6 м длины и 0,8 м ширины, можно согнуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки будет 1,6 м, во втором 0,8 м. Найти отношение объемов трубок.

Решение:

трубки образуют цилиндры, объем, которого вычисляется по формуле:

$$V=\pi R^2 h.$$

У первого цилиндра высота будет 1,6 м, тогда радиус 0,4 м. Во втором цилиндре высота будет 0,8 м, тогда радиус 0,8 м. Вычислим отношение объемов двух цилиндров:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi 0{,}4^2 1{,}6}{\pi 0{,}8^2 0{,}8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1:2.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 *м,* 50 *м* и 36 *м*. Найти ребро равновеликого ему куба.

2) Измерения прямоугольного бруса: 3 *см,* 4 *см* и 5 *см*. Если увеличить каждое его ребро на *x см*, то поверхность увеличится на 54 *см*^{2}. Как увеличится его объем?

3) Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.
4) Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 9 *м* и 12 *м*, каждое из боковых ребер равно 12,5 *м*. Найти объем пирамиды.
5) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны по 6 *см*, а основание 8 *см*. Боковые ребра равны между собой и равны 9 *см*. Найти объем пирамиды.
6) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 *см* и 15 *см* и образуют угол в 60^0. Меньшая диагональ параллелепипеда составляем с плоскостью основания угол 30^0. Найти объем параллелепипеда.
7) Высота и образующая конуса относятся как 4:5, а объем конуса равен 96π *см*^{3}. Найти полную поверхность конуса.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы объемов тел и поверхностей вращения.

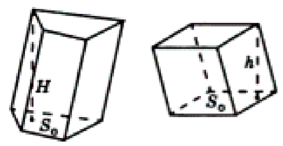
Литература: [10, с. 267-282]

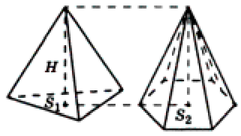
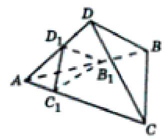
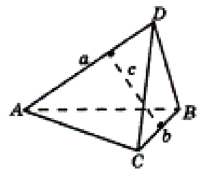
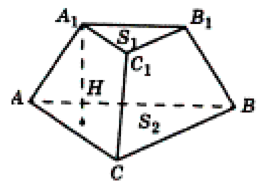
Практическое занятие №20
Подобие тел. Отношения объемов подобных тел

Цель работы:
студент должен:
знать:
- формулы для вычисления объемов подобных тел;

уметь:
- вычислять объемы подобных тел.

Сведения из теории:

<table>
<tr><td colspan="2">Объемы равных тел равны
Если тело разбито на несколько тел, не имеющих общих внутренних точек, то его объем равен сумме объемов этих тел.
Отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.</td></tr>
<tr><td>Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту: $V=S_oH$
или
произведению площади ее перпендикулярного сечения на боковое ребро: $V=S_ol$.</td><td>
$V_1 = S_oH,$
$V_2 = S_oh,$
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{H}{h}.$</td></tr>
</table>

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту: $V = \frac{1}{3} S_o H.$	 $V_1 = \frac{1}{3} S_1 H,$ $V_2 = \frac{1}{3} S_2 H,$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}.$
Объемы призм (пирамид), *имеющих равновеликие основания*, относятся *как их высоты*. *Объемы призм* (пирамид), *имеющих равные высоты*, относятся *как площади их оснований*.	
Объемы тетраэдров, имеющих *общий трехгранный угол*, относятся как *произведения ребер*, содержащих этот угол.	 $\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}.$
Объем тетраэдра может быть найден по формуле: $V = \frac{1}{6} abc \sin\varphi$, где a и b – длины скрещивающихся ребер, c – расстояние между ними, φ – угол между ними.	
Объем усеченной пирамиды $V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$	
Объем многогранника можно получить, разбив его на не имеющие общих внутренних точек тетраэдры (*триангуляция*) и суммировав их объемы.	
Если в многогранник *можно вписать шар*, *то объем* многогранника равен: $V = \frac{1}{3} S_{полн} R,$ где R – радиус вписанного шара, $S_{полн.}$ – площадь полной поверхности многогранника.	

Пример 126.

Чашка диаметром 8 *см* и высотой 10 *см* вмещает 0.5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды?

Решение:

поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков (в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно, высота h новой чашки находится из отношения:

$$(h/10)^3 = 4/0{,}5, \text{ т.е. } h^3 = 8 \cdot 10^3, \text{ откуда } h = 20 \text{ см;}$$

Аналогично, для диаметра d получим:

$$(d/8)^3 = 4/0{,}5 \text{ , т.е. } d^3 = 8 \cdot 8^3, \text{ откуда } d = 16 \text{ см.}$$

Пример 127.

Во сколько, примерно, раз великан ростом в 2 *м* тяжелее карлика ростом в 1 *м*?

Решение:

т.к. как фигуры человеческого тела приблизительно подобны, то при вдвое большем росте человек имеет объем не вдвое, а в 8 раз больший. Значит, наш великан весит больше карлика в 8 раз. Самый высокий великан, о котором сохранились сведения, был один житель Эльзаса ростом в 275 *см* – на целый метр выше человека среднего роста. Самый маленький карлик имел высоту меньше 40 *см*, т.е. был ниже эльзасца круглым счетом в 7 раз. Поэтому если бы на одну чашку весов поставить великана – эльзасца, то на другую надо бы для равновесия поместить $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ карлика, т.е. целую толпу.

Пример 128.

Продаются два арбуза разных размеров. Один на четвертую долю шире другого, а стоит он в полтора раза дороже. Какой из них выгоднее купить?

Решение:

объем большого арбуза превышает объем меньшего в $1{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}25 = 125/64$ раза, т.е. почти вдвое. Выгоднее значит купить крупный арбуз, он дороже только в полтора раза, а съедобного вещества в нем больше раза в два.

Пример 129.

Имеются две медные кастрюли одинаковой формы и со стенками одной толщины. Первая в 8 раз вместительнее второй. Во сколько раз она тяжелее?

Решение:

обе кастрюли – тела, геометрически подобные. Если большая кастрюля в 8 раз вместительнее, то все ее линейные размеры в два раза больше: она вдвое выше и вдвое шире. Поэтому ее поверхность больше в $2 \cdot 2 = 4$ раза (поверхности подобных тел относятся, как квадраты линейных размеров). При одинаковой толщине стенок вес кастрюли зависит от величины ее поверхности.

Ответ: большая кастрюля вчетверо тяжелее меньшей кастрюли.

Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи

1) Строительный кирпич весит 4 *кг*. Сколько весит игрушечный кирпичик из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше?

2) Продаются две дыни одного сорта. Одна окружностью 60, другая – 50 *см*. Первая в полтора раза дороже второй. Какую дыню выгоднее купить?

3) Мякоть вишни окружает косточку слоем такой же толщины, как и сама косточка. Будем считать, что и вишня и косточка имеют форму шариков. Можете ли вы сообразить в уме, во сколько раз объем сочной части вишни больше объема косточки?

4) Башня Эйфеля в Париже, 300 *м* высоты, сделана целиком из железа, которого пошло на нее около 8000000 *кг*. Я желаю заказать точную железную модель знаменитой башни, висящую всего 1 *кг*. Какой она будет высоты?

5) Что тяжелее: стакан сахарного песку или такой же стакан колотого сахара?

6) Почему лучина загорается скорее, чем толстое полено, от которого она отколота?

Контрольные вопросы:

1. Чему равны объемы равных тел?
2. Чему равно отношение объемов подобных тел?
3. Чему равно отношение объемов призм, пирамид?

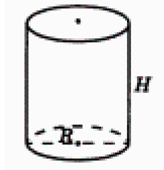
Литература: [10, с. 267-282]

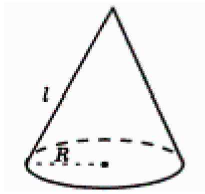
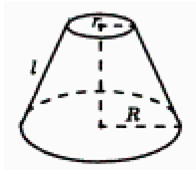
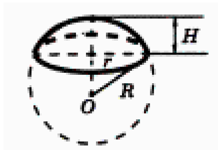
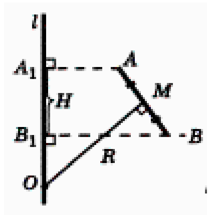
Практическое занятие №21
Подобие тел. Отношения площадей поверхностей подобных тел

Цель работы:
студент должен:
знать:
- формулы для вычисления площадей поверхностей цилиндра, конуса, сферы, подобных фигур;

уметь:
- уметь вычислять площади поверхностей цилиндра, конуса, сферы, подобных фигур.

Сведения из теории:
Площади тел вращения

Площадь боковой поверхности цилиндра $S=2\pi RH$ *Площадь полной поверхности цилиндра* $S=2S_{осн.}+S_{бок.}=2\pi R(R+H)$	

Площадь боковой поверхности конуса $S=\pi Rl$ *Площадь полной поверхности конуса* $S=S_{осн.}+S_{бок.}=\pi R(R+l)$	
Площадь боковой поверхности усеченного конуса $S_{бок.}=\pi(R+r)l$ *Площадь полной поверхности усеченного конуса* $S_{полн.}=\pi(R^2+r^2+(R+r)l)$	
Площадь поверхности сферы $S=4\pi R^2$ *Площадь сферической поверхности сферического сегмента* $S_{бок.}=2\pi RH$ *Площадь полной поверхности сферического сегмента* $S_{полн.}=S_{бок.}+\pi r^2=2\pi RH+\pi r^2$	
Поверхность вращения отрезка AB, не имеющего с осью *l* общих внутренних точек, равна произведению проекции этого отрезка на ось и длины окружности, радиусом которой служит отрезок серединного перпендикуляра отрезка с концами на оси и на отрезке	
Отношение поверхностей подобных тел равно квадрату коэффициента подобия	

Пример 130.

В "Путешествии Гулливера" рассказывается о лилипутах, рост которых в 12 раз меньше нормального. Если на костюм человека нормального роста идет 4 $м^2$ материала, то, сколько материала идет на костюм лилипута?

Решение:

коэффициент подобия $=12^2$, т. е. на костюм лилипута идет в 144 раза меньше. Т.о., 40 000 $см^2$: 144=280 $см^2$.

Пример 131.

Один человек на 1/4 ниже другого. Каково отношение поверхностей их тел, считая, что оба тела геометрически подобны?

Решение:

поверхность человека меньшего роста составляет $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ поверхности более высокого.

Пример 132.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21π, а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

Решение:

высота цилиндра равна:

$$h = \frac{S_{бок.}}{2\pi R} = \frac{21\pi}{7\pi} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 133.

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину – рис. 77). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Решение:

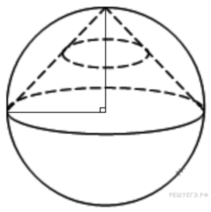


Рисунок 77.

высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$l^2 = r^2 + r^2,$$

$$l^2 = 2r^2,$$

$$l = r\sqrt{2}.$$

Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$ поэтому образующая равна:

$$28\sqrt{2}\sqrt{2} = 56.$$

Ответ: 56.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Сторона первого квадрата больше стороны второго квадрата в 2 раза (в 5 раз). Во сколько раз площадь первого квадрата больше площади второго квадрата?

2) Сторона первого квадрата составляет 1/3 (0,1) стороны второго квадрата. Какую часть площадь первого квадрата составляет от площади второго квадрата?

3) Коэффициент подобия в подобных многоугольниках равен 4 (1/5; 0,4; 2,5). Чему равно отношение их площадей?

4) Отношение площадей подобных многоугольников равно 36 (100; 0,09). Чему равно отношение сходственных сторон этих многоугольников?

5) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 18π, а диаметр основания равен 9. Найдите высоту цилиндра.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы площадей поверхности цилиндра, конуса, шара.
2. Чему равно отношение поверхностей подобных тел?

Литература: [10, с. 295-302]

Практическое занятие № 22

Степени с действительными показателями, их свойства

Цель работы:

студент должен:

знать:

- основные показательные тождества;
- свойства степеней с действительными показателями;

уметь:

- вычислять степени с действительными показателями.

Сведения из теории:

Повторим определения *понятия степени* с натуральным, нулевым, целым отрицательным и рациональным показателями:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}};\ a^{-n}=1/(a^n);\ a^0=1,\ a\neq 0;\ a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m},$$

$$m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N},\ n\geq 2.$$

Повторим свойства степеней с рациональным показателем:

при любых x и y справедливы равенства:

$$a^x a^y=a^{x+y};$$
$$a^x/a^y=a^{x-y};$$
$$(a^x)^y=a^{xy};$$
$$(ab)^x=a^x b^x;$$
$$(a/b)^x=a^x/b^x.$$

Степень с действительным показателем

Свойства степеней с действительным показателем:

1. $a^{x/y}=a^{(xk)/(yk)}$, $a>0$, $y, k\in\mathbf{N}$, $x\in\mathbf{Z}$.
2. $a^x>0$, $a>0$, $x\in\mathbf{R}$ (любая степень положительного числа положительна).
3. $a^x>1$ при $a>1$, $x>0$.
4. $a^x<1$ при $a>1$, $x<0$.
5. $1^x=1$ (любая степень единицы равна единице).
6. $a^x<1$ при $0<a<1$, $x>0$.
7. $a^x>1$ при $0<a<1$, $x<0$.
8. Если $a>1$, $a\neq 1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x=b$ при $b>0$.

9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Кроме перечисленных свойств важно отметить три свойства, на которых основано решение простейших показательных уравнении и неравенств:
10. Если $a^x=a^y$, то $x=y$ при $a>0$, x, $y\neq 1$.
11. Если $a^x<a^y$, то $x<y$ при $a>0$.
12. Если $a^x<a^y$, то $x>y$ при $0<a<1$.

Правила действия над степенями с действительным показателем выражаются формулами (тождествами):
13. $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$.
14. $a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta}$.
15. $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$.
16. $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$ при $a>0$, $b>0$.
17. $|ab|^{\alpha}=|a|^{\alpha}\,|b|^{\alpha}$ при $ab>0$.
18. $(a/b)^{\alpha}=a^{\alpha}/b^{\alpha}$ при $a>0$, $b>0$.
19. $|a/b|^{\alpha}=|a|^{\alpha}/|b|^{\alpha}$ при $ab>0$.

Формулы, обратные формулам 1-7, так же верны.

Пример 11.

Вычислите: $\dfrac{7^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

Решение:
упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$\frac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{7}\cdot 49^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}{\frac{1}{5}-9^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{7}\sqrt{49}-\sqrt{\frac{1}{64}}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-\sqrt{9}}=\frac{\frac{1}{7}\cdot 7-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-3}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{72}}{-2\frac{4}{5}}=\frac{\frac{72}{72}-\frac{1}{72}}{-\frac{14}{5}}=\frac{\frac{71}{72}}{\left(-\frac{14}{5}\right)}=\frac{71}{72}\cdot\left(-\frac{5}{14}\right)=-\frac{355}{1008}.$$

Пример 12.

Вычислите: $\dfrac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}$.

Решение:
упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$\frac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}=\frac{\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}{\left(2^6\right)^{0,25}\cdot 2^{0,5}}=\frac{2^{-2}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}}-\frac{1}{2}}{2^{1,5}\cdot 2^{0,5}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{2^2}=\frac{\frac{1}{20}-\frac{1}{2}}{4}=$$

$$=\frac{-\frac{9}{20}}{4}=-\frac{9}{80}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант №1. Вычислите: 1) $2\cdot 2^{-3}$; 2) $\frac{\left(3^{-2}\right)^3\cdot 27^2}{3}$. №2. Упростите: $b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}}$.	**2 вариант** №1. Вычислите: 1) $5^{-2}\cdot 5$; 2) $\frac{\left(2^{-2}\right)^4\cdot 16^2}{2^3}$. №2. Упростите: $a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{4}}$.	**3 вариант** №1. Вычислите: 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 2) $3\sqrt[3]{-27}+0{,}1\sqrt[4]{81}-\sqrt{1}$. №2. Упростите: $x^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}}$.
4 вариант №1. Вычислите: 1) $\left(\sqrt{5}\right)^{-8}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. №2. Упростите: $\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^4 y^{\frac{5}{2}}$.	**5 вариант** №1. Вычислите: 1) $5\cdot 8^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-12}$. №2. Упростите: $\frac{c^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{6}}}$.	**6 вариант** №1. Вычислите: 1) $36^{\frac{1}{2}}\cdot 2$; 2) $\frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$. №2. Упростите: $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} x^{\frac{2}{3}}$.
7 вариант №1. Вычислите: 1) $16^{-\frac{1}{2}}$; 2) $5\sqrt[4]{16}-0{,}2\sqrt[3]{-0{,}027}+\sqrt[5]{1}$. №2. Упростите: $a^{\frac{7}{2}}\sqrt{a}$.	**8 вариант** №1. Вычислите: 1) $27^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[5]{32\cdot 0{,}00001}$. №2. Упростите: $y^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{y}$.	**9 вариант** №1. Вычислите: 1) $\sqrt[4]{0{,}0001\cdot 16}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$. №2. Упростите: $2\sqrt[3]{\sqrt{a}}-\sqrt[6]{ab}:\sqrt[6]{b}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные показательные тождества.
2. Перечислите свойства степеней с действительными показателями.

Литература: [15, с. 186-188]

Практическое занятие № 23

Преобразование показательных выражений

Цель работы:

студент должен:
знать:

- свойства степеней;
- способы решения показательных уравнений;

уметь:

- решать уравнения, содержащие переменную в показателе степени.

Сведения из теории:
Уравнение, содержащее переменную в показателе, называется *показательным*.
При решении показательных уравнений вида $a^{f(x)}=a^{k(x)}$ (где $a>0$, $a\neq 0$) используется следующее свойство: $(a^{f(x)}=a^{k(x)})\rightarrow(f(x)=k(x))$.
Преобразование показательного уравнения к виду $a^{f(x)}=a^{k(x)}$ выполняется многими способами. Рассмотрим некоторые способы.

Пример 20.
Решите уравнение: $2^{x^2-7x+12}=1$.
Решение:
по определению нулевого показателя степени: $1=2^0$, получим:

$$2^{x^2-7x+12}=2^0.$$

По свойству $(a^{f(x)}=a^{k(x)})\rightarrow(f(x)=k(x))$, получаем обычное квадратное уравнение, корни которого вычисляем через дискриминант:

$$x^2-7x+12=0,$$

$$x_1=3,\ x_2=4.$$

Ответ: 3, 4.

Пример 21.
Решите уравнение: $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{2x}=128$.
Решение:
приведем обе части уравнения к основанию 2:

$$\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{2x}=128,$$

$$\left(\frac{1000}{125}\right)^{2x}=2^7,$$

$$8^{2x}=2^7,$$

$$(2^3)^{2x}=2^7,$$

$$2^{6x}=2^7.$$

По свойству $(a^{f(x)}=a^{k(x)})\rightarrow(f(x)=k(x))$, получаем $6x=7$ и $x=7/6$.
Ответ: 7/6.

Пример 22.

Решите уравнение: $2^{x-2} = 5^{x-2}$.

Решение:

разделив обе части уравнения на одно и то же число 5^{x-2}, получим:

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = \frac{5^{x-2}}{5^{x-2}},$$

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = 1,$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{0},$$

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 23.

Решите уравнение: $2^{x+3} - 2^{x} = 112$.

Решение:

вынесем общий множитель 2^x за скобку, получим:

$$2^{x+3} - 2^{x} = 112,$$

$$2^{x}(2^{3} - 1) = 112,$$

$$2^{x} \cdot 7 = 112,$$

$$2^{x} = 112/7,$$

$$2^{x} = 16,$$

$$2^{x} = 2^{4},$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнения:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$; 2) $27 \cdot 3^{2(x+1)} - 3^{x+2} = 2$.	1) $2^{3x}=5^{x}$; 2) $3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{2x} =$ $= 4^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}}$.	1) $3^{x}=7^{x/2}$; 2) $3^{x+1} + 3^{x} = 108$.
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
1) $5^{x-3}=2^{3-x}$; 2) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 16 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+3}$.	1) $5^{\frac{x-3}{2}} = 7^{x-3}$; 2) $5^{2x+1} = 5^{x} + 4$.	1) $3^{x-5}=81$; 2) $0{,}01\sqrt[x]{0{,}1}=10^{-x}$.

7 вариант	8 вариант	9 вариант
1) $9^{\frac{x-1}{2}}=27^{x^2-1}$; 2) $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0$.	1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$; 2) $0{,}5^{\sqrt{x-3}}=1$.	1) $1{,}8^{x^2-5x-11}=5{,}832$; 2) $1000\sqrt[x]{0{,}1}=100^x$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется показательным уравнением?

2. Запишите свойство, которое используют при решении показательных уравнений.

Литература: [4, с.62-63]

Практическое занятие № 24

Логарифмическая функция, ее график и свойства

Цель работы:

студент должен:

знать:

- основные свойства логарифмов;

уметь:

- строить график логарифмической функции с разными основаниями.

Сведения из теории:

Пусть a – положительное число, $a\neq1$.

Функцию, заданную формулой $y=log_ax$ называют *логарифмической функцией с основанием a*.

Перечислим основные свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел $\boldsymbol{R}_+$, т.е. $D(log_a)=(0; +\infty)$.

2. Область значений – множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, т.е. $E(log_a)=(-\infty; +\infty)$.

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a>1$ или убывает при $0<a<1$.

Для построения графика заметим, что значение 0 логарифмическая функция принимает в точке 1; $log_a1=0$ при любом $a>1$, т.к. $a^0=1$.

Вследствие возрастания функции при $a>1$ получаем, что при $x>1$ логарифмическая функция принимает положительные значения, а при $0<x<1$ – отрицательные.

Если $0<a<1$,то логарифмическая функция убывает на $\boldsymbol{R}_+$, поэтому функция принимает положительные значения при $0<x<1$, а при $x>1$ – отрицательные.

Опираясь на все вышесказанное строим графики логарифмической функции $y=log_ax$ при $a>1$ и при $0<a<1$.

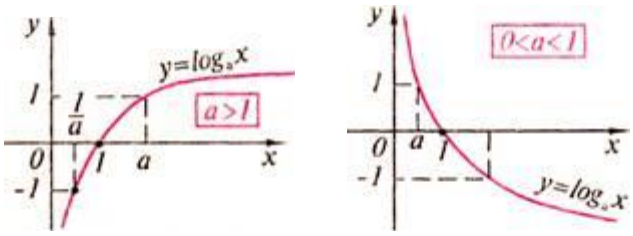


Рисунок 17. График логарифмической функции

Справедливо следующее утверждение: графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y=x$.

Пример 58.

Решить графически уравнение $\log_2 x=-x+1$.

Решение:

построим графики функций $y=\log_2 x$ и $y=-x+1$ в одной координатной плоскости:

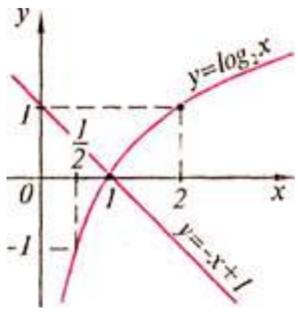


Рисунок 18. Графики функций $y=\log_2 x$ и $y=-x+1$

Графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x=1$.
Проверка показывает, что $x=1$ – корень данного уравнения.

Задания для самостоятельного решения:
Решите графически уравнение:

1 вариант $\log_4(x+3)=x-1$.	**2 вариант** $\lg(1-x)=x^2-1$.	**3 вариант** $\frac{1}{2}\log_2(x+1)=x$.
4 вариант $1+\log_2(x+2)=2-x$.	**5 вариант** $\log_{\frac{1}{2}} x=x-3$.	**6 вариант** $\log_2 x=2^{5-x}$.
7 вариант $\left\|\log_{\frac{1}{2}} x\right\|=1-x$.	**8 вариант** $\log_{\frac{1}{3}} x=2x-7$.	**9 вариант** $\lg(1-x)=5-x$.

Контрольные вопросы:
1. Что называется логарифмической функцией?
2. Перечислите свойства логарифмической функции.

Литература: [4, с. 111-119]

Практическое занятие № 25
Преобразование логарифмических выражений

Цель работы:
студент должен:
знать:

- определение логарифма;
- свойства логарифмов;

уметь:

- решать уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Сведения из теории:
Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.
Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение: $log_a x=b$.
Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке (0; +∞) и принимает на этом промежутке все действительные значения.
Теорема о корне: пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень в промежутке I.
По вышесказанной теореме следует, что для любого b данное уравнение имеет, и притом только одно, решение.
Из определения логарифма числа следует, что таким числом является a^b.

Пример 24.
Решите уравнение: $log_2(x^2+4x+3)=3$.
Решение:
данному уравнению удовлетворяют те значения x, для которых выполнено равенство: $x^2+4x+3=2^3$.
Получаем обычное квадратное уравнение $x^2+4x+3=8$ или $x^2+4x-5=0$, корни которого вычисляем с помощью дискриминанта: $x_1=1$; $x_2=-5$.

Пример 25.
Решите уравнение: $log_5(2x+3)=log_5(x+1)$.
Решение:
данное уравнение определено для тех значений x, при которых выполнены неравенства: $2x+3>0$ и $x+1>0$ (это следует из определения логарифма).
Для этих x данное уравнение равносильно уравнению: $2x+3=x+1$, из которого находим $x=-2$.
Выполняя проверку, убеждаемся, что $x=-2$ не удовлетворяет неравенству $x+1>0$. Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Пример 26.

Решите уравнение: $log^2{}_5x-log_5x^2-3=0$.

Решение:

данное уравнение, воспользовавшись свойством степени логарифма, можно переписать в виде: $(log_5x)^2-2log_5x-3=0$.

Сделаем замену переменной: $t=log_5x$, тогда наше уравнение перепишется в виде: $t^2-2t-3=0$, корни которого вычислим через дискриминант: $t_1=3$, $t_2=-1$.

Вернемся к исходной переменной: $log_5x=3$ или $log_5x=-1$.

Используя определение логарифма получаем корни исходного уравнения: $x_1=5^3=125$, $x_2=5^{-1}=1/5=0,2$.

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнение:

1 вариант 1) $\log_4(5x+6)=0$; 2) $\lg(x-9)+$ $+2\lg\sqrt{2x-1}=2.$	**2 вариант** 1) $\lg\dfrac{x-5}{x-2}=2$; 2) $\lg(2x)+\lg(x+3)=$ $=\lg(12x-4).$	**3 вариант** 1) $\log_3 x+\log_x 3=2{,}5$; 2) $4\lg^2 x-2=\lg x^2$.
4 вариант 1) $\log_{\frac{1}{5}}\left(7x+\dfrac{1}{25}\right)=2$; 2) $4\lg^2 x+\lg x^2 2=0$.	**5 вариант** 1) $\log_{\frac{1}{2}}(5-\log_3 x)=-2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-\sqrt{x^2-16})=-1$.	**6 вариант** 1) $\log_2(2x-1)=4$; 2) $1+\log_2(3x+1)=$ $=\log_2(x^2-5).$
7 вариант 1) $\log_3(x-12)=2$; 2) $\log_2(4-x)+$ $+\log_2(1-2x)=2\log_2 3.$	**8 вариант** 1) $\log_x16-\log_x2=1/2$; 2) $\dfrac{1}{2}\lg(x^2+2x)=$ $=\lg\sqrt{x+2}.$	**9 вариант** 1) $\log_3(x+8)=-2$; 2) $\lg(x-3)+$ $+\lg(x-2)=1-\lg 5.$

Контрольные вопросы:

1. Что называется логарифмическим уравнением?
2. Перечислите способы решения уравнений, содержащих переменную под знаком логарифма или в основании логарифма.

Литература: [4, с. 66-68]

Практическое занятие № 26

Решение задач на перебор вариантов

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение соединений, их видов;
- определение вероятности;

- теоремы сложения, умножения вероятностей;

уметь:

- по условию задачи различать виды соединений;
- вычислять разные виды соединений;
- вычислять вероятность событий.

Сведения из теории:

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*. Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)].$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)n,$$

$n!$-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при решении задач часто используется равенство:

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

или

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...[n-(m-1)]}{m!}.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \ (0 \le m \le n), \quad C_n^n = 1; \ C_n^0 = 1; \ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Пример 94.

Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение:

по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пример 95.

Решить уравнение: $A_n^5 = 30 A_{n-2}^4$.

Решение:

используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим:

$$n(n-1) = 30(n-5),$$

и решим получившееся квадратное уравнение: $n_1 = 6, \ n_2 = 25$.

Пример 96.

Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$.

Решение:

решим второе уравнение:

$$C_x^2 = 66 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 66;$$

$$x^2 - x - 132 = 0;$$

$$x_1 = -11, \ x_2 = 12.$$

Т. к. $x > 2$, то -11 не удовлетворяет условию задачи. Подставив x=12 в первое уравнение системы, получим

$$C_{12}^y = C_{12}^{y+2}.$$

Используя основное свойство сочетаний, имеем:

$$C_{12}^y = C_{12}^{12-y},$$

тогда

$$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2} \Rightarrow 12 - y = y + 2 \Rightarrow y = 5.$$

Ответ: x=12, y=5.

Пример 97.
Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?
Решение:
условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Случайные события
Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний).
Всякий результат или исход испытания называется *событием*.
Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.
В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.
События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.
События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности.
Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов m, к числу всех возможных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$.
Невозможному событию соответствует вероятность $P(A)$=0, а достоверному – вероятность $P(A)$=1.

Пример 98.
В лотерее из 1000 билетов 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Какова вероятность, что этот билет выигрышный?
Решение:
количество благоприятных событий, удовлетворяющих условию задачи m=200.
Число всех возможных вариантов n=1000.
По определению вероятности: $P(A)$=200/1000=0,2.

Пример 99.
Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар черный?
Решение:
общее число шаров m=8, из них черных n=3, по определению:
$P(A)$=3/8=0,375.

Пример 100.
Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шара, вынимают наудачу два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными?
Решение:
общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 (12+8) элементов по два:

$$n = C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190;$$

число благоприятных исходов m равно числу сочетаний из 8 элементов по два:

$$n = C_{8}^{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

По определению: $P(A)$=28/190=0,147.

Пример 101.
В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Какова вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными?
Решение:
число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5:

$$n = C_{18}^{5} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568.$$

Подсчитаем число благоприятных исходов m. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_{4}^{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся равно числу сочетаний из 14 по 3:

$$C_{14}^{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных, поэтому общее число комбинаций m равно:

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184,$$

по определению: $P(A)$=2184/8568=0,255.

Задания для самостоятельного решения:

Решить следующие задачи, используя определение сочетаний, их видов:

1 вариант 1) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 2) Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать? 3) Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$.	**2 вариант** 1) Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола? 2) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов? 3) Решите уравнение: $30x = A_x^3$.
3 вариант 1) Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать? 2) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 3) Решите уравнение: $30A_{x-2}^4 = A_x^5$.	**4 вариант** 1) Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек? 2) На собрании должны выступить 5 человек (*А, Б, В, Г, Д*). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если *А* должен выступать первым? 3) Решите уравнение: $20A_{x-2}^3 = A_x^5$.
5 вариант 1) Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг? 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «журнал»? 3) Решите уравнение: $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$.	**6 вариант** 1) Сколькими способами можно составить список из 6 человек? 2) Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя собрания и секретаря? 3) Решите уравнение: $4C_{x+2}^{x-1} = A_x^3$.
7 вариант 1) Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрами 3 или 5? 2) Из города А в город В ведут 6 дорог, а из города В в город С –3 дороги. Сколькими способами	**8 вариант** 1) В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в этом

можно попасть из города А в город С? 3) Решите систему: $\begin{cases} A_x^y = 9A_x^{y-1} \\ 2C_x^y = 3C_x^{y-1} \end{cases}$.	турнире? 2) Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были разных размеров? 3) Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$.
9 вариант 1) Группа учащихся изучает семь учебных дисциплин. сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот учебный день должно быть четыре различных урока? 2) Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз? 3) Вычислить: $\dfrac{A_{19}^5 + A_{20}^6}{A_{18}^4}$.	

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение соединения, их виды?
2. Приведите формулы для вычисления разных видов соединений.
3. Дайте определение случайного события, их виды. Приведите примеры.
4. Дайте классическое определение вероятности.

Литература: [5, с. 234-238]

Приложения

Приложение 1

Образец титульного листа тетради для практических занятий

Краевое государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
"Лазовский колледж технологий и туризма»

Практикум по математике

Профессия

Вариант работы _________

Студент группы _________

ФИО ___________________

20 __ г.